

TW

**stichting
mathematisch
centrum**



TW

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 75/73

JULI

E.J.M. VELING
EEN ASYMPTOTISCHE BENADERING VOOR DE
PERIODE VAN EEN VOLTERRA-LOTKA SYSTEEM

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Samenvatting

Een Volterra-Lotka systeem, twee gekoppelde niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen met een periodieke oplossing, wordt voor een kleine waarde van een parameter ϵ bestudeerd.

In het fasevlak ontstaat een gesloten kromme, die op impliciete wijze het verband aangeeft tussen de beide variabelen. Het is mogelijk deze kromme zo in vier segmenten te verdelen, dat op elk segment de ene variabele uitgedrukt kan worden als functie van de andere in de vorm van een machtsreeks of dubbelreeks. Met behulp hiervan kan de periode van de oplossing asymptotisch benaderd worden in termen van de parameter ϵ .

Tevens wordt een correctiefactor bepaald op een formule, die gegeven wordt door Volterra voor het geval dat de oplossing een ellipsvormige kromme beschrijft rond het evenwichtspunt.

De gevonden formules worden vergeleken met numerieke berekeningen.

Tenslotte wordt nader ingegaan op het singuliere storingskarakter voor kleine waarden van de parameter ϵ en wordt voor een zeker tijdsinterval de oplossing uniform benaderd.

Inhoud

	pag.
0. Notaties	1
1. Inleiding	2
2. Formele machtreeksen	10
3. Volledige representatie voor ϵ klein	13
4. Berekening periode voor ϵ klein	22
5. Correctiefactor op formule van Volterra	28
6. Behandeling als singulier storingsprobleem	32
7. Numerieke resultaten	40
8. Literatuur	42
9. Appendix	45

0. Notaties

$$\begin{aligned}
L(x) &= x - \log(x) & ; & \quad L(x) \text{ monotoon dalend, } 0 < x \leq 1, \\
& & & \quad L(x) \text{ monotoon stijgend, } x \geq 1, \\
& & & \quad \text{minimum } L(x) = 1, \quad \text{voor } x = 1.
\end{aligned}$$

$$c = \sqrt{2(L(\theta)-1)} = \sqrt{2(\theta-1-\log(\theta))}.$$

$$\mu : \text{oplossing van } L(\mu) = L(\theta) \text{ , met } \mu > 1 \text{ , } 0 < \theta < 1.$$

$$\rho_1 = \varepsilon(L(p)-1) = \varepsilon(p-\log(p)-1).$$

$$\rho_2 = \exp \left\{ \frac{L(h) - L(\theta) - \varepsilon}{\varepsilon} \right\} = \exp \left\{ \frac{h - \log(h) - \theta + \log(\theta) - \varepsilon}{\varepsilon} \right\}.$$

$$\rho_3 = \rho_1.$$

$$\rho_4 = -\log(\rho_2) = \frac{L(\theta) - L(h) + \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\theta - \log(\theta) - h + \log(h) + \varepsilon}{\varepsilon}.$$

$$\delta = \rho_4.$$

$$\sigma = \frac{1}{\delta}.$$

$$\tau = \frac{\log \delta}{\delta}.$$

$$I(\alpha) = \int_0^{-\log(\alpha)} \left[\frac{1}{x + \alpha(1-\exp(x))} - \frac{1}{(1-\alpha)x} \right] dx.$$

$$\sim : \text{asymptotisch equivalent voor } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\approx : \text{bij benadering gelijk; zonder uitspraak over asymptotisch gedrag.}$$

1. Inleiding

In deze scriptie zullen wij het volgende stelsel gekoppelde, niet-lineaire differentiaalvergelijkingen bestuderen

$$\frac{dh^*}{d\tau} = h^*(a - \alpha p^*) \quad ; \quad a, \alpha > 0 \quad (1.1a)$$

$$\frac{dp^*}{d\tau} = p^*(-b + \beta h^*) \quad ; \quad b, \beta > 0 \quad (1.1b)$$

$$h^*(0) = \theta \frac{b}{\beta} \quad ; \quad p^*(0) = \frac{a}{\alpha} \quad ; \quad 0 < \theta < 1. \quad (1.1c)$$

Dit systeem kan dienen als een eenvoudig model om een kwantitatief inzicht te verkrijgen in de wisselwerking die bestaat tussen een populatie prooidieren (h^* ; herbivoren) en een populatie roofdieren (p^* ; predatoren). Volterra en Lotka waren een van de eersten die aan het stelsel (1.1) een dergelijke biologische interpretatie gaven, zie [16] en [9].

Zij gingen uit van het idee dat de groeisnelheid van de prooibevolking ($\frac{dh^*}{d\tau}/h^*$) constant (a) zou zijn zonder de aanwezigheid van rovers. De rem op deze groeisnelheid wordt gevormd door de roofdieren en deze negatieve bijdrage aan de groeisnelheid wordt recht evenredig (α) met hun aantal verondersteld. Dit geeft vergelijking (1.1a). Verder is het een zinvolle aanname dat de groeisnelheid van de roofdieren ($\frac{dp^*}{d\tau}/p^*$) een negatieve constante ($-b$) is bij afwezigheid van prooi; deze groeisnelheid wordt echter vermeerderd met een bedrag recht evenredig (β) met het aantal aanwezige prooidieren. Dit geeft vergelijking (1.1b). De parameter θ geeft de mate van verstoring aan ten opzichte van het evenwichtspunt ($b/\beta, a/\alpha$), waar de beide groeisnelheden gelijk zijn aan nul. Wij zullen ons alleen bezighouden met fysisch interpreteerbare situaties, dat wil zeggen h^*, p^* worden niet-negatief verondersteld.

Systeem (1.1) is het eenvoudigste model om de wisselwerking tussen prooi- en roofdieren te beschrijven. Er zijn dan ook enige belangrijke bezwaren tegen dit model aan te voeren:

- A. Het model veronderstelt dat er geen concurrentie optreedt tussen de prooidieren, dat wil zeggen de prooidieren zouden leven in een ongelimiteerde wereld bij afwezigheid van de rovers. Voor algemenere modellen, die onderlinge concurrentie wel aannemen zie [12] en [4].
- B. Het model veronderstelt dat een verandering in een populatiegrootte van bijvoorbeeld de prooidieren direct aanleiding geeft tot een verandering in de populatiegrootte van de roofdieren. Dit is in strijd met de werkelijkheid omdat de roofdieren minstens een generatie nodig hebben om zich aan de nieuwe situatie aan te passen. Dit vertragingseffect geeft aanleiding tot zogenaamde integro-differentiaalvergelijkingen, die ook reeds genoemd worden door Volterra [16].
- C. Het model veronderstelt dat er verschillende evenredigheidsconstanten (a, b, α, β) ingevoerd kunnen worden. Het is echter aannemelijk dat de waarden van deze parameters door een waarschijnlijkheidsverdeling gegeven worden. Voor deze mogelijkheid is bijvoorbeeld door Bartlett [1] een stochastische formulering gegeven van het systeem (1.1).

Een overzicht van een aantal laboratoriumproeven om het model van Volterra-Lotka te toetsen en een beschrijving van de moeilijkheden, die daarbij ontstaan worden gegeven door Klomp [8].

Wij zullen echter alleen systeem (1.1) beschouwen en daartoe voeren wij eerst de volgende transformaties uit

$$h = \frac{\beta}{b} h^* \quad ; \quad p = \frac{\alpha}{a} p^* \quad (1.2a)$$

$$t = at \quad ; \quad \epsilon = \frac{a}{b} . \quad (1.2b)$$

Dan gaat (1.1) over in

$$\frac{dh}{dt} = h(1-p) \quad (1.3a)$$

$$\epsilon \frac{dp}{dt} = p(-1+h) \quad (1.3b)$$

$$h(0) = \theta \quad ; \quad p(0) = 1 \quad ; \quad 0 < \theta < 1 . \quad (1.3c)$$

(1.3) is eenvoudig integreerbaar in het (h,p) -vlak (fasevlak) en de oplossing luidt in impliciete vorm, rekening houdend met de beginvoorwaarden

$$h - \log(h) + \varepsilon(p - \log(p)) = \theta - \log(\theta) + \varepsilon \quad (1.4)$$

of met behulp van de notatie $L(x) = x - \log(x)$

$$L(h) + \varepsilon L(p) = L(\theta) + \varepsilon. \quad (1.5)$$

Bestudering van (1.3) in het fasevlak geeft 2 singuliere punten namelijk $A = (0,0)$ en $B = (1,1)$. Om het karakter van deze singuliere punten te bepalen wordt, met behulp van de gebruikelijke techniek (1.3) gelineairiseerd ten opzichte van A en van B . A blijkt een zadelpunt te zijn. Na de transformatie $x = h - 1$, $y = p - 1$ luidt (1.3ab)

$$\frac{dx}{dt} = -y(1+x) \quad (1.6a)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = x(1+y) \quad (1.6b)$$

zodat, na lineairisatie en eliminatie van x volgt: $\ddot{y} + y = 0$. Het gelineairiseerde stelsel ten opzichte van B geeft dus aan dat B een centrumpunt is. Nu is het mogelijk dat de niet-lineaire termen dit karakter verstoren, zodat B een stabiel of niet-stabiel wervelpunt is. Om dit nader te onderzoeken kan het criterium van Poincaré worden toegepast, zie bijvoorbeeld Davies & James [5], Ch.7; wij zullen echter met behulp van de impliciete relatie (1.5) aantonen dat B een centrumpunt blijft en dat dus de oplossing van (1.3) periodiek is met eindige periode T , omdat op de kromme (1.5) verder geen singuliere punten meer liggen.

Wij bekijken (1.5) eerst voor $p = 1$, dus $L(h) = L(\theta)$. Deze vergelijking heeft, behalve de oplossing $h = \theta$ nog een tweede oplossing $h = \mu$, omdat $L(h)$ monotoon dalend is voor $0 < h \leq 1$, onbegrensd monotoon stijgend voor $h \geq 1$, met minimum $L(1) = 1$. Voor $0 < \theta < 1$ geldt dus $L(\theta) > 1$, zodat volgt $\mu > 1$.

Het is mogelijk μ te benaderen voor $\theta \rightarrow 1$, zie Appendix I:

$$\mu = 1 + C + \frac{1}{3}C^2 + \frac{1}{36}C^3 + o(C^4), \quad C \rightarrow 0 \quad (1.7a)$$

$$C = \sqrt{2(L(\theta)-1)} = \sqrt{2(\theta-1-\log(\theta))}, \quad (1.7b)$$

zie hoofdstuk 7 voor numerieke resultaten met deze formule.

Nadere bestudering van (1.5) geeft op gemakkelijke wijze:

- A. $p = 1$: $h = \theta$ en $h = \mu$;
en voor $\theta < h < \mu$: $L(h) < L(\theta)$.
- B. $h = 1$: $p = p_{\min} < 1$ en $p = p_{\max} > 1$;
en voor $p_{\min} < p < p_{\max}$: $L(p) < 1 + (L(\theta)-1) / \epsilon$.
- C. $p_{\min} < p < p_{\max}$: $h = h^-$ en $h = h^+$ met $\theta < h^- < 1 < h^+ < \mu$.
- D. $\theta < h < \mu$: $p = p^-$ en $p = p^+$ met $p_{\min} < p^- < 1 < p^+ < p_{\max}$.

Dus stelt (1.5) een gesloten kromme voor; tevens blijkt het grote voordeel dat (1.3) exact integreerbaar is in het fasevlak. Wij zullen verder dan ook voornamelijk gebruik maken van relatie (1.5).

Voor voldoende voorwaarden, waarvoor gegeneraliseerde Volterra-Lotka systemen integreerbaar zijn, zie [14]. Een uitbreiding hierop wordt gegeven door [17], waarin voldoende voorwaarden worden gegeven voor het bestaan van een periodieke oplossing voor systemen in de algemene vorm

$$\frac{dx}{dt} = x F(x,y) \quad (1.8a)$$

$$\frac{dy}{dt} = y G(x,y). \quad (1.8b)$$

Nu wij dus hebben aangetoond dat (1.3) een periodieke oplossing bezit, zijn wij geïnteresseerd in de periode T . T zal een functie zijn van de parameter ϵ , en van de beginwaarde θ , dus $T = T(\epsilon, \theta)$. Hieruit volgt dat de periode T van (1.1) voldoet aan $T = T / a$, vanwege (1.2b) en dus onafhankelijk is van de parameters α, β en verder enkel afhangt van θ en het quotiënt $\epsilon = a/b$, behoudens de factor $1/a$.

Een eerste resultaat dat Volterra op vrij ingewikkelde wijze afleidt, is dat de periode voor kleine verstoringen vanuit het evenwichtspunt B

gegeven wordt door

$$T \approx 2\pi/\epsilon . \quad (1.9)$$

Dat dit geldt, is gemakkelijk te zien aan het resultaat na lineairisatie van (1.3) ten opzichte van B, namelijk $\epsilon \ddot{y} + y = 0$, met als oplossing $((\theta-1)/\sqrt{\epsilon}) \sin(t/\sqrt{\epsilon})$, waaruit (1.9) volgt. In hoofdstuk 5 zullen wij deze formule uitbreiden met een correctiefactor en tevens globaal aangeven voor welke waarden van θ en ϵ deze gecorrigeerde formule toegepast kan worden. Het resultaat luidt, zie voor C (1.7b)

$$T \approx 2\pi/\epsilon \left[\frac{1}{\left[\frac{1-C^2/9}{\epsilon} + 1 \right]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - C^2/9}} + \frac{1}{\epsilon \sqrt{1 - C^2/(9\epsilon)}} \right\} \right] . \quad (1.10)$$

Wij zijn verder geïnteresseerd in het geval, dat ϵ een klein getal voorstelt, en dat θ niet te dicht bij de waarde 1 ligt en hieraan zullen wij de meeste aandacht besteden. Zie fig.1 voor het verloop in de tijd van de oplossing met $\epsilon = 0.1$ en $\theta = 0.5$. Een kleine waarde van ϵ komt overeen met a/b klein in (1.1); indien echter in (1.1) a/b groot is, dan levert de transformatie

$$t^* = b\tau \quad ; \quad \epsilon^* = \frac{b}{a} \quad (1.11)$$

in plaats van (1.2b) een equivalent systeem, dat in de vorm (1.3) te brengen is door verwisseling van h en p en omkering van de tijdas. Voor $\epsilon \rightarrow 0$ vertoont (1.3) het karakter van een singulier storingsprobleem. Hoofdstuk 6 is hieraan gewijd en daar wordt aangetoond dat althans voor een bepaald segment van de kromme in het fasevlak de oplossingen ($h=h(t)$, $p=p(t)$) uniform in t benaderd kunnen worden.

Om de periode voor ϵ klein te berekenen is het echter voldoende als wij uit de relatie (1.5) $h = h(p)$ en $p = p(h)$ kennen, want met behulp van deze uitdrukkingen volgt de periode als de som van de volgende integralen

$$T = T_I + T_{II} + T_{III} + T_{IV} \quad (1.12a)$$

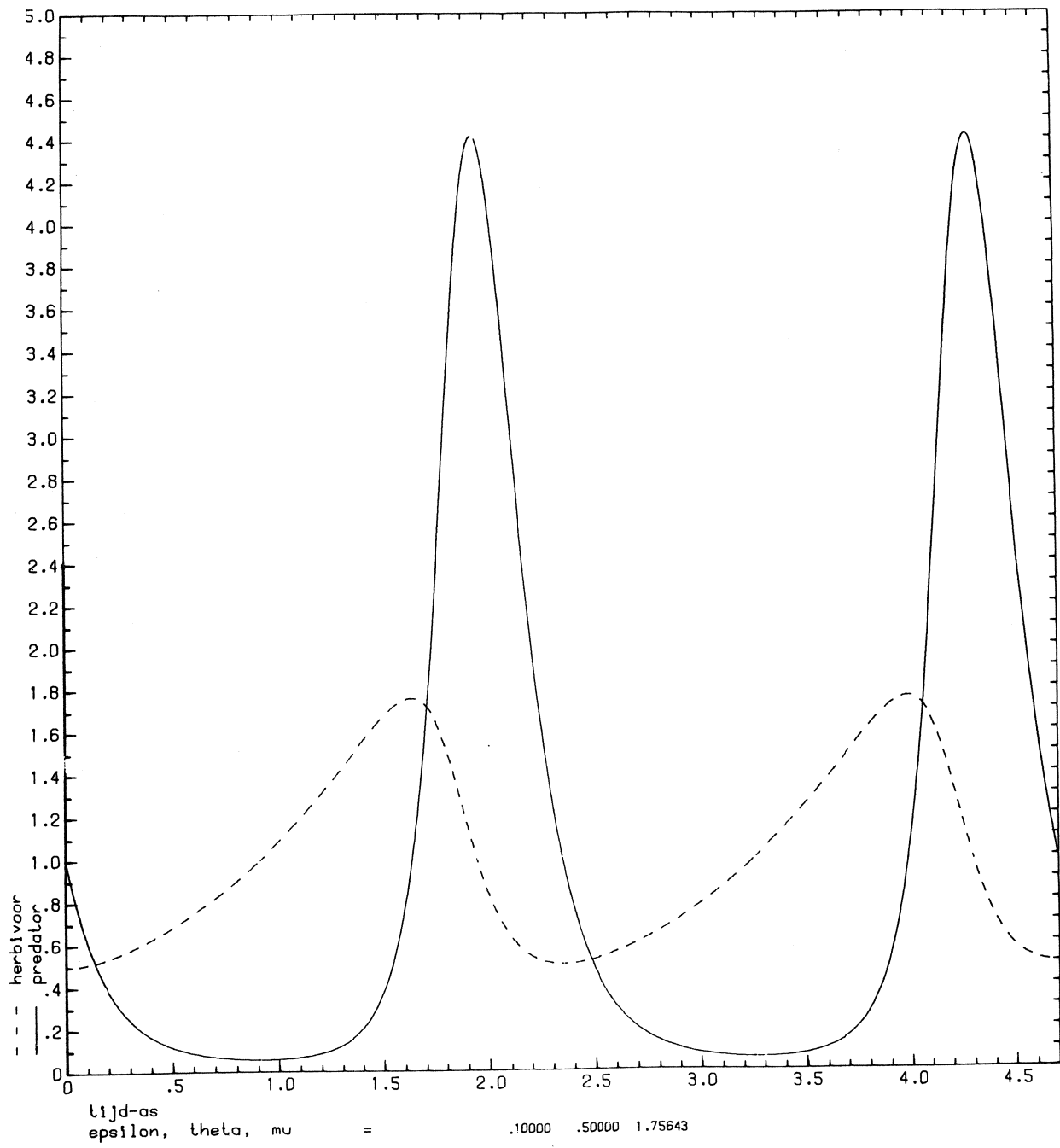


fig.1

$$\text{met} \quad T_I = \int_{p_4}^{p_1} \frac{dp}{\left(\frac{dp}{dt}\right)} \quad ; \quad T_{II} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\left(\frac{dh}{dt}\right)} \quad (1.12b)$$

$$T_{III} = \int_{p_2}^{p_3} \frac{dp}{\left(\frac{dp}{dt}\right)} \quad ; \quad T_{IV} = \int_{h_3}^{h_4} \frac{dh}{\left(\frac{dh}{dt}\right)} \quad , \quad (1.12c)$$

waarin de punten (h_i, p_i) , $i = 1, 2, 3, 4$ later worden vastgelegd.

Door een geschikte keuze van deze punten is het mogelijk de ene variabele uit te drukken in de andere in de vorm van een convergente machtreeks of dubbelreeks

$$\text{I} \quad h = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho_1^n \quad ; \quad \rho_1 = \varepsilon(L(p)-1) \quad (1.13a)$$

$$\text{II} \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho_2^n \quad ; \quad \rho_2 = \exp\{(L(h)-L(\theta)-\varepsilon)/\varepsilon\} \quad (1.13b)$$

$$\text{III} \quad h = \mu + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho_3^n \quad ; \quad \rho_3 = \rho_1 \quad (1.13c)$$

$$\text{IV} \quad p = \rho_4 + \log(\rho_4) + \frac{\log(\rho_4)}{\rho_4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{n,m} (\log(\rho_4))^{n-m} \rho_4^{-n} \quad ;$$

$$\rho_4 = -\log(\rho_2) = (L(\theta)-L(h)+\varepsilon) / \varepsilon. \quad (1.13d)$$

De bewijzen voor de convergentie van deze ontwikkelingen en de uitdrukkingen voor a_n , b_n , c_n , $d_{n,m}$ worden in hoofdstuk 3 gegeven met behulp van enige stellingen uit de complexe functietheorie. In hoofdstuk 2 zullen wij aangeven hoe met een formele benadering althans enige termen van (1.13) gevonden kunnen worden, genoeg overigens om daarmee de periode T te berekenen tot op $O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon)$.

In hoofdstuk 4 wordt de periode berekend door de integraties (1.12) uit te voeren met behulp van de kennis van (1.13). Het resultaat luidt

$$\begin{aligned}
 T &= (\mu - \theta) + \varepsilon \log \varepsilon \left[\frac{1}{(\theta - 1)} - \frac{1}{(\mu - 1)} \right] + \\
 &\varepsilon \left[\frac{1}{(1 - \theta)} - \frac{1}{(1 - \mu)} + \frac{1}{(1 - \theta)} \log((1 - \theta) \log(1/\theta)) - \frac{1}{(1 - \mu)} \log((\mu - 1) \log(\mu)) + \right. \\
 &\quad \left. I(\theta) - I(\mu) \right] + O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{1.14a}$$

$$I(\alpha) = \int_0^{-\log(\alpha)} \left[\frac{1}{x + \alpha(1 - \exp(x))} - \frac{1}{(1 - \alpha)x} \right] dx . \tag{1.14b}$$

In hoofdstuk 7 worden de twee gevonden formules vergeleken met de resultaten verkregen door numerieke berekeningen op de EL-X8 van het Mathematisch Centrum.

Voor enige berekeningen in de volgende hoofdstukken wordt verwezen naar de Appendix.

De voornaamste resultaten van deze scriptie zijn reeds samengevat in [6].

2. Formele machtreeksen

In dit hoofdstuk zullen wij aangeven hoe voor ϵ klein uit relatie (1.5) voor de gebieden, bepaald door de gekozen punten (h_i, p_i) expliciete uitdrukkingen voor h en p respectievelijk in p en h gevonden kunnen worden in de vorm van formele machtreeksen, dat wil zeggen machtreeksen, waarvan de coëfficiënten nog van ϵ kunnen afhangen.

De keuze van de punten (h_i, p_i) is zo dat in gebied II $p = p(h)$ maximaal van orde ϵ is, in gebied IV $p = p(h)$ van orde ϵ^{-1} is; deze twee gebieden worden met elkaar verbonden door gebieden I en III, respectievelijk voor $h < 1$ en $h > 1$, zie fig.2.

Substitutie van de formeel gestelde machtreeksen in de relatie (1.5) en ontwikkeling naar machten van ϵ levert de coëfficiënten. Deze constructie wordt hier enkel en alleen maar toegepast om een idee te krijgen over het gedrag van de functies in de vier gebieden.

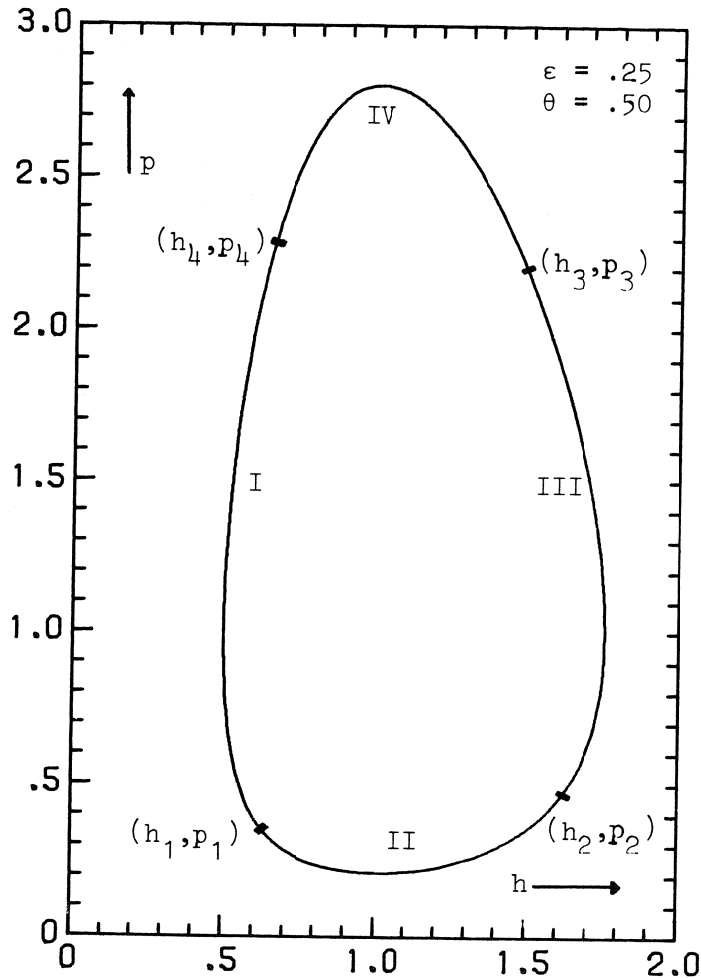


fig.2

Gebied I

Stel formeel

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(p) \epsilon^n. \quad (2.1)$$

Dit levert

$$\epsilon^0 : h_0 - \log(h_0) = L(\theta) \rightarrow h_0 = \theta \quad (2.2a)$$

$$\epsilon^1 : h_1 - \frac{h_1}{h_0} + L(p) = 1 \rightarrow h_1 = \frac{\theta}{(1-\theta)} \{L(p) - 1\} \quad (2.2b)$$

$$\epsilon^2 : h_2 - \frac{h_2}{h_0} + \frac{h_1^2}{2h_0^2} = 0 \rightarrow h_2 = \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} \{L(p) - 1\}^2. \quad (2.2c)$$

De reeks krijgt zo de vorm (1.13a).

Gebied II

Stel formeel

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(h, \epsilon) \epsilon^n. \quad (2.3)$$

Dit levert

$$\epsilon^0, \epsilon^1 : L(h) - \epsilon \log \epsilon - \epsilon \log(p_1) = L(\theta) + \epsilon \rightarrow p_1 = \frac{1}{\epsilon} \exp \left\{ \frac{L(h) - L(\theta) - \epsilon}{\epsilon} \right\} \quad (2.4a)$$

$$\epsilon^2 : p_1 - \frac{p_2}{p_1} = 0 \rightarrow p_2 = p_1^2 \quad (2.4b)$$

$$\epsilon^3 : p_2 - \frac{p_3}{p_1} + \frac{p_2^2}{2p_1^2} = 0 \rightarrow p_3 = \frac{3}{2} p_1^3. \quad (2.4c)$$

De reeks krijgt zo de vorm (1.13b).

Gebied III

De behandeling is dezelfde als voor gebied I; vervang echter overal θ door μ in de uitdrukkingen voor de coëfficiënten.

Gebied IV

Stel formeel

$$p = \sum_{n=-1}^{\infty} p_n (h\epsilon) \epsilon^n. \quad (2.5)$$

Dit levert

$$\epsilon^0 : L(h) + p_{-1} = L(\theta) \rightarrow p_{-1} = L(\theta) - L(h) \quad (2.6a)$$

$$\epsilon^1 : p_0 - \log(p_{-1}) + \log \epsilon = 1 \rightarrow p_0 = \log(p_{-1}) - \log \epsilon + 1 \quad (2.6b)$$

$$\epsilon^2 : p_1 - \frac{p_0}{p_{-1}} = 0 \rightarrow p_1 = \frac{p_0}{p_{-1}} \quad (2.6c)$$

$$\epsilon^3 : p_2 - \frac{p_1}{p_{-1}} + \frac{p_0^2}{2p_{-1}^2} = 0 \rightarrow p_2 = \frac{p_1}{p_{-1}} - \frac{p_0^2}{2p_{-1}^2}. \quad (2.6d)$$

Het resultaat voor dit gebied geeft geen volledig inzicht in de structuur van de dubbelreeks (1.13d), hoewel de eerste termen overeenkomen.

Met behulp van de gevonden termen is het mogelijk de periode te berekenen, maar daar de zo geconstrueerde reeksen slechts formele reeksen zijn, waarvan wij niet weten of zij asymptotisch convergeren, kunnen wij geen uitspraak doen over een ordeschatting.

3. Volledige representatie voor ε klein

In dit hoofdstuk zullen wij voor ε klein een volledige representatie geven van de gezochte relaties tussen h en p in de vier gebieden. Daartoe vermelden wij eerst enige stellingen uit de complexe functietheorie om een functie te inverteren. Deze uitbreiding tot complexe functies zal toepassing op relatie (1.5) vergemakkelijken. Voor een overzicht van de gebruikte methodes zie De Bruyn [2], Ch. 2.

Stelling 3.1

Een convergente machtreeks is een asymptotische reeks.

Bewijs: Stel $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ convergent, $|z| < R$, dan geldt

$$|f(z) - \sum_{i=0}^n a_i z^i| = |z^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1+i} z^i| \leq |z|^{n+1} M, \text{ dus}$$

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i + o(z^{n+1}), \quad |z| \rightarrow 0.$$

Stelling 3.2

Zij $w = f(z)$ regulier in een omgeving van $z = z_0$; $w_0 = f(z_0)$; een noodzakelijke en voldoende voorwaarde dat $w = f(z)$ een ondubbelzinnig bepaalde oplossing $z = F(w)$ bezit, regulier in een omgeving van $w = w_0$, is $f'(z_0) \neq 0$. Deze oplossing bestaat dan als $|w - w_0| < R^2 a^2 / 6M$ voor $|z - z_0| \leq R^2 a / 4M$, met $R < R'$; R' is convergentiestraal machtreeks $f(z)$ rond $z = z_0$; $a = |f'(z_0)|$; $M = \max \{|f(z)| \mid |z - z_0| \leq R\}$.

De wortel $z = F(w)$ kan geschreven worden als

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz, \quad C = \{z \mid |z - z_0| = \frac{R^2 a}{4M}\}. \quad (3.1)$$

Bewijs: Zie bijvoorbeeld Copson [3], Ch.6.22.

Stelling 3.3 (Formule van Lagrange)

Zij $f(z)$ regulier voor $z = z_0$; $f'(z_0) \neq 0$; dan is er een ondubbelzinnig bepaalde functie $F(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n (w-w_0)^n$, regulier in een omgeving van $w = w_0$, zodanig dat $z = F(w)$ de oplossing is van de vergelijking $w = f(z)$, met

$$k_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ \phi(z) \}^n \right]_{z=z_0}, \quad (3.2)$$

waarin $\phi(z)$ voldoet aan $f(z) - w_0 = (z-z_0) / \phi(z)$, $\phi(z) \neq 0$ in een omgeving $z = z_0$.

Bewijs : Zie bijvoorbeeld Copson [3], Ch.6.23.

Stelling 3.4 (Rouché)

Zij $f(z)$, $g(z)$ regulier binnen en op gesloten contour C , $f(z) \neq 0$ op C ; $|g(z)| < |f(z)|$ op C , dan bezitten $f(z)$ en $f(z) \pm g(z)$ hetzelfde aantal nulpunten binnen C .

Bewijs: Zie bijvoorbeeld Copson [3], Ch. 6.21.

Zoals beschreven in hoofdstuk 1, kiezen wij nu de punten (h_i, p_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, die de begrenzingen vormen van de vier segmenten, waarin de gesloten kromme (1.5) is verdeeld. De keuze van deze punten is zodanig, dat in gebied II $p = p(h)$ van orde ϵ is, in gebied IV $p = p(h)$ van orde ϵ^{-1} , terwijl de gebieden I, III bestaan uit de tussenliggende segmenten op de contour, als de begrenzingen voor II en IV eenmaal gekozen zijn. Wij voeren daarbij locale, positieve coördinaten in (ξ_i, η_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, om de punten (h_i, p_i) aan te geven. Uiteraard is het voor vaste i niet mogelijk de ξ_i en η_i onafhankelijk te kiezen. Om convergente ontwikkelingen te verkrijgen, dienen ξ_3 en ξ_4 begrensd te zijn, met bovengrenzen afhankelijk van θ , maar onafhankelijk van ϵ .

$$h_1 = \theta(1 + \frac{1}{(\theta-1)} \epsilon \log \epsilon + \epsilon \xi_1) ; \quad p_1 = \epsilon \eta_1 \quad (3.3a)$$

$$h_2 = \mu(1 + \frac{1}{(\mu-1)} \varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon \xi_2) ; \quad p_2 = \varepsilon \eta_2 \quad (3.3b)$$

$$h_3 = \mu(1 - \xi_3) \quad ; \quad p_3 = \frac{\eta_3}{\varepsilon} \quad (3.3c)$$

$$h_4 = \theta(1 + \xi_4) \quad ; \quad p_4 = \frac{\eta_4}{\varepsilon} . \quad (3.3d)$$

Wij zullen nu de stellingen toepassen op de vier gebieden. Wij geven aan dat h ligt op de boog in gebied I met $h \in H_I$, en analoog voor de andere gebieden.

Gebied I

Schrijf $x = h - \theta$; uit (1.5) volgt dan

$$\log(1 + \frac{x}{\theta}) - x = \varepsilon(L(p)-1) = \rho_1. \quad (3.4)$$

Beschouw p als parameter, $p \in P_I$;

$$\rho_1(p_1) = \varepsilon(L(p_1) - 1) = \varepsilon(\varepsilon\eta_1 - \log \varepsilon - \log(\eta_1) - 1) \sim -\varepsilon \log \varepsilon,$$

$$\rho_1(p_4) = \varepsilon(L(p_4) - 1) = \varepsilon(\eta_4/\varepsilon + \log \varepsilon - \log(\eta_4) - 1) \sim \eta_4,$$

$$\rho_1 < \max(\rho_1(p_1), \rho_1(p_4)) \sim \eta_4.$$

$$\text{voor } h_1 : x = h_1 - \theta = \frac{\theta}{(\theta-1)} \varepsilon \log \varepsilon + \theta \varepsilon \xi_1 \sim \frac{\theta}{(\theta-1)} \varepsilon \log \varepsilon,$$

$$\text{voor } h_4 : x = h_4 - \theta = \theta \xi_4,$$

$$x < \max(x(h_1), x(h_4)) = \theta \xi_4.$$

Beschouw nu $w = f(z) = \log(1 + \frac{z}{\theta}) - z$; $\phi(z) = \frac{z}{w}$; $z_0 = 0$; $f(z_0) = 0$;
 $f(z)$ regulier voor $z = z_0$; $f'(z_0) = \frac{1}{\theta} - 1 \neq 0$; dus $a = \frac{1}{\theta} - 1 > 0$.

Volgens stellingen 3.2, 3.3 geldt nu, dat voor $|z| \leq R^2 a/4M$, $|w| < R^2 a^2/6M$, met $R = \theta/2 < \theta = R'$ (convergentiestraal machtreeks $f(z)$) en met $\max\{|f(z)| \mid |z| \leq R\} = M(\theta)$, de vergelijking $w = f(z)$ een eenduidige oplossing bezit in de vorm $z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$, met a_n gegeven door (3.2).

De beperking tot reële waarden voor z en w geeft nu, daar voldaan is aan de voorwaarden voor voldoende kleine waarden, afhankelijk van θ , van (ξ_4, η_4) , dat voor h geldt

$$h = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho_1^n \quad ; \quad \rho_1 = \varepsilon(L(p)-1) \quad (3.5a)$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \frac{x}{\log(1 + \frac{x}{\theta}) - x} \right\}^n \right]_{x=0} . \quad (3.5b)$$

Berekening van a_n , $n = 1, 2$ geeft, zie Appendix II

$$a_1 = \frac{\theta}{(1-\theta)} \quad ; \quad a_2 = \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} , \quad (3.6)$$

in overeenstemming met (2.1), (2.2).

Gebied II

Uit (1.5) volgt

$$pe^{-p} = \exp\left\{\frac{L(h) - L(\theta) - \epsilon}{\epsilon}\right\} = \rho_2 . \quad (3.7)$$

Beschouw h als parameter, $h \in H_{II}$;

$$\begin{aligned} \rho_2(h_1) &= \exp\left[\left\{L(\theta) + \frac{\theta}{(\theta-1)} \epsilon \log \epsilon + \theta \epsilon \xi_1 - \log\left(1 + \frac{1}{(\theta-1)} \epsilon \log \epsilon + \epsilon \xi_1\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - L(\theta) - \epsilon\right\} / \epsilon\right] = \\ &= \exp\left[\left\{\theta \epsilon \xi_1 + \left(\frac{\theta}{(\theta-1)} - \frac{1}{(\theta-1)}\right) \epsilon \log \epsilon - \epsilon \xi_1 + O(\epsilon^2 \log^2 \epsilon) - \epsilon\right\} / \epsilon\right] = \\ &= \exp[\log \epsilon + (\theta-1) \xi_1 - 1 + O(\epsilon \log^2 \epsilon)] = \\ &= [\epsilon \exp\{(\theta-1) \xi_1 - 1\}] (1 + O(\epsilon \log^2 \epsilon)) \sim \epsilon , \end{aligned}$$

$$\rho_2(h_2) \sim \epsilon \text{ (analoog),}$$

$$\rho_2 < \max(\rho_2(h_1), \rho_2(h_2)) \sim \epsilon .$$

$$p_1 = \epsilon \eta_1, p_2 = \epsilon \eta_2, p < \max(p_1, p_2) = \max(\epsilon \eta_1, \epsilon \eta_2) = \epsilon \max(\eta_1, \eta_2) \sim \epsilon .$$

Beschouw nu $w = f(z) = ze^{-z}$; $\phi(z) = \frac{z}{w} = e^z$; $z_0 = 0$; $f(z_0) = 0$;
 $f(z)$ regulier voor $z = z_0$; $f'(z_0) = 1 \neq 0$; dus $a = 1$.

Volgens stellingen 3.2, 3.3 geldt nu, dat voor $|z| \leq R^2 a / 4M$,
 $|w| < R^2 a^2 / 6M$, met $R = 1 < R'$ (convergentiestraal machtreeks $f(z)$ is oneindig) en met $M = \max\{|f(z)| \mid |z| \leq R\} = |f(-1)| = \exp(-1)$, de vergelijking $w = f(z)$ een eenduidige oplossing bezit in de vorm

$z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$, met b_n gegeven door (3.2).

De beperking tot reële waarden voor z en w geeft nu, daar voldaan is aan de voorwaarden voor voldoende kleine waarden van ε , dat voor p geldt

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho_2^n ; \quad \rho_2 = \exp\left\{\frac{L(h) - L(\theta) - \varepsilon}{\varepsilon}\right\} \quad (3.8a)$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} e^{np} \right]_{p=0} = \frac{n^{n-1}}{n!} . \quad (3.8b)$$

dus $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = \frac{3}{2}$, in overeenstemming met (2.3), (2.4).

Gebied III

De behandeling is hier identiek als voor gebied I; voor de coëfficiënten c_n geldt, door vervanging van θ door μ in de coëfficiënten a_n

$$c_n(\mu) = a_n(\mu) , \quad (3.9)$$

dus

$$c_1 = \frac{\mu}{(1-\mu)} ; \quad c_2 = \frac{\mu}{2(1-\mu)^3} . \quad (3.10)$$

Gebied IV

Wij passen nu een iets andere techniek toe. Uit (1.5) volgt

$$L(p) = \rho_4 ; \quad \rho_4 = -\log(\rho_2) = \frac{L(\theta) - L(h) + \varepsilon}{\varepsilon} . \quad (3.11)$$

Daar wij de wortel willen vinden, die voor $\varepsilon \rightarrow 0$ naar oneindig gaat, is de voorafgaande techniek niet zonder meer toe te passen. Door eerst een beginschatting te maken voor dit karakter, zullen wij bewijzen dat de restterm op een analoge wijze behandeld kan worden. Deze restterm wordt dan wel voorgesteld door een dubbelreeks. Stel

$$p = \rho_4 + \log(\rho_4) + v , \quad (3.12)$$

schrijf verder $\delta = \rho_4$, $\sigma = 1 / \delta$, $\tau = \log \delta / \delta$, dan geldt voor v , via substitutie van $p = \delta + \log \delta + v$ in $L(p) = \delta$

$$e^v - 1 - \sigma v - \tau = 0. \quad (3.13)$$

Er geldt nu, met $C = \{z \mid |z| = \pi\}$

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - \sigma}{e^z - 1 - \sigma z - \tau} z \, dz, \quad (3.14)$$

want $\text{Res}_{z=v} \frac{(e^z - \sigma)z}{e^z - 1 - \sigma z - \tau} = \lim_{z \rightarrow v} (z-v) \frac{(e^z - \sigma)z}{e^z - 1 - \sigma z - \tau} = v$. Wij moeten nu

alleen nog aantonen dat het enige singuliere punt van de integrand optreedt voor $z = v$. Toepassing van de stelling van Rouché (stelling 3.4) geeft dat zowel $e^z - 1$ als $e^z - 1 - (\sigma z + \tau)$ binnen $|z| = \pi$ hetzelfde aantal nulpunten hebben, indien voldaan is aan, met $r = \min_{|z|=\pi} |e^z - 1| \neq 0$,

$$|\sigma|, |\tau| < \frac{r}{2(\pi+1)}, \quad (3.15)$$

want dan geldt voor $|z| = \pi$: $|e^z - 1| \neq 0$ en

$$|e^z - 1| > r > \frac{r}{2} = \frac{r}{2(\pi+1)} (\pi+1) > |\sigma|\pi + |\tau| \geq |\sigma z + \tau|.$$

$e^z - 1$ heeft 1 enkelvoudig nulpunt, namelijk $z = 0$, binnen $|z| = \pi$, dus ook $e^z - 1 - (\sigma z + \tau)$ heeft 1 enkelvoudig nulpunt $z = v$, $|v| < \pi$, met v reëel, anders zou ook $\bar{v}$ voldoen.

Daar op C $|\sigma z + \tau| < |e^z - 1|$ geldt er verder

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(e^z - \sigma)z}{(e^z - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma z + \tau}{e^z - 1} \right]^n dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(e^z - \sigma)z}{(e^z - 1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} \frac{\sigma^n z^n \tau^m}{(e^z - 1)^{n+m}} \right] dz \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{\tau}^{n,m} \left[\binom{n+m}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(e^z - \sigma) z^{n+1}}{(e^z - 1)^{n+m+1}} dz \right] \stackrel{(2)}{=} \\
& \tau \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{\tau}^{n,m} (k_{n,m}^{-1} l_{n,m}^{\sigma}) = \\
& \tau \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{\tau}^{n,m} (k_{n,m}^{-1} l_{n-1,m}) \stackrel{(3)}{=} \\
& \frac{\log \delta}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\log \delta)^m}{\delta^{n+m}} (k_{n,m}^{-1} l_{n-1,m}) = \\
& \frac{\log \delta}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (k_{m,n-m}^{-1} l_{m-1,n-m}) \frac{(\log \delta)^{n-m}}{\delta^n} = \\
& \frac{\log \delta}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{n,m} (\log \delta)^{n-m} \delta^{-n}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

(1) : vanwege uniforme convergentie.

(2) : vanwege het feit, dat voor $m = 0$, de integraal niet singulier in $z = 0$ is.

(3) : $l_{-1,m} \equiv 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Voor p volgt dus met behulp van (3.12) en (3.16)

$$p = \rho_4 + \log(\rho_4) + \frac{\log(\rho_4)}{\rho_4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{n,m} (\log(\rho_4))^{n-m} \rho_4^{-n}, \tag{3.17a}$$

$$\rho_4 = \frac{L(\theta) - L(h) + \varepsilon}{\varepsilon}, \tag{3.17b}$$

$$d_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \left[\binom{n+1}{m} \int_C \frac{e^z z^{m+1}}{(e^z - 1)^{n+2}} dz - \binom{n}{m-1} \int_C \frac{z^m}{(e^z - 1)^{n+1}} dz \right] =$$

$$\frac{1}{(n-m)!} \left\{ \binom{n+1}{m} \left[\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \frac{e^x x^{m+2}}{(e^x - 1)^{n+2}} \right]_{x=0} - \binom{n}{m-1} \left[\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \frac{x^{m+1}}{(e^x - 1)^{n+1}} \right]_{x=0} \right\}. \tag{3.17c}$$

Berekening van $d_{n,m}$ voor $n = 0, 1$, $m = 0, 1$ geeft, zie Appendix III

$$d_{0,0} = 1 \quad ; \quad d_{1,0} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad d_{1,1} = 1 . \quad (3.18)$$

Nu dient nog te worden nagegaan of aan voorwaarde (3.15) is voldaan

$$\sigma(h_4) = \frac{1}{\rho_4(h_4)} = \frac{\varepsilon}{L(\theta) - L(h_4) + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\log(1+\xi_4) - \theta\xi_4 + \varepsilon} \sim \varepsilon .$$

$$\sigma(h_3) \sim \varepsilon \quad (\text{analoog}) ,$$

$$\tau = \frac{\log \delta}{\delta} = -\sigma \log \sigma , \quad \text{dus } \tau(h_4), \tau(h_3) \sim -\varepsilon \log \varepsilon .$$

Voor voldoende kleine waarden van ε wordt dus voldaan aan (3.15).

De representatie van p is zo, dat de termen een asymptotische rij vormen, want zij $\phi_{n,m} = (\log \delta)^{n-m} \delta^{-n}$, dan geldt

$$\phi_{n,m+1} = o(\phi_{n,m}) , \quad \delta \rightarrow \infty , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 .$$

$$\phi_{n+1,m} = o(\phi_{n,n}) , \quad \delta \rightarrow \infty , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n .$$

Het resultaat (2.5), (2.6) geeft dus geen feitelijk inzicht in de dubbelsom representatie (3.17).

Wij kunnen nu het verband aangeven tussen de ξ_i en η_i , dat wij zullen gebruiken in hoofdstuk 4. Substitutie van $h = h_1$ in ρ_2 geeft p_1 via (3.8), analoog (h_2, p_2) en substitutie van $h = h_4$ in ρ_4 geeft p_4 via (3.17), analoog (h_3, p_3) . Het resultaat luidt

$$\eta_1 = \exp\{(\theta-1) \xi_1 - 1\} + O(\varepsilon \log^2 \varepsilon) \quad (3.19a)$$

$$\eta_2 = \exp\{(1-\mu) \xi_2 - 1\} + O(\varepsilon \log^2 \varepsilon) \quad (3.19b)$$

$$\eta_3 = \log(1-\xi_3) + \mu \xi_3 + O(\varepsilon \log \varepsilon) \quad (3.19c)$$

$$\eta_4 = \log(1+\xi_4) - \theta \xi_4 + O(\varepsilon \log \varepsilon) . \quad (3.19d)$$

Door stelling 3.1 zijn wij ervan verzekerd, dat (3.19) inderdaad een asymptotische voorstelling is. Het zijn namelijk de eerste termen uit de convergente machtreeksvoorstelling, en de resttermen zijn voor η_1, η_2 orde $\varepsilon \log^2 \varepsilon$, zoals blijkt uit de waarden voor $\rho_2(h_1), \rho_2(h_2)$, zie gebied II en voor η_3, η_4 orde $\varepsilon \log \varepsilon$, via de waarden voor $\sigma(h_3), \sigma(h_4)$, zie gebied IV; daar veroorzaakt de logaritmische tweede term de orde $\varepsilon \log \varepsilon$.

In Appendix IV zullen wij nog aangeven hoe de coëfficiënten a_n en $d_{n,m}$ met behulp van recurrente betrekkingen bepaald kunnen worden.

4. Berekening periode voor ϵ klein

Nu wij de volledige representatie kennen in de vier gebieden kunnen wij de integraties (1.12) uitvoeren. Volgens stelling 3.1 kunnen wij volstaan met de eerste termen uit de machtreeksen om een juiste beschrijving van het asymptotisch gedrag te geven. Wij zullen de integratie uitvoeren voor het gedeelte van de contour met $h \leq 1$ ($h \geq 1$ gaat analoog) en daarbij de volgende termen gebruiken

$$\begin{aligned} \text{I} : \quad h &= \theta + \epsilon \frac{\theta}{(1-\theta)} \{p - \log(p) - 1\} + O(\rho_1^2(p)) , \\ O(\rho_1^2(p_1)) &= O(\epsilon^2 \log^2 \epsilon) \quad ; \quad O(\rho_1^2(p_4)) = O(\eta_4^2) , \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{II} : \quad p &= \exp \left\{ \frac{h - \log(h) - \theta + \log(\theta) - \epsilon}{\epsilon} \right\} + O(\rho_2^2(h)) , \\ O(\rho_2^2(h_1)) &= O(\epsilon^2) \quad ; \quad O(\rho_2^2(1)) = O(\exp \left\{ \frac{2(1-\theta+\log(\theta))}{\epsilon} \right\}) , \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\text{IV} : \quad p = \frac{\theta - \log(\theta) - h + \log(h)}{\epsilon} + 1 + O(\log \epsilon) , \quad (4.3)$$

en met

$$h_1 = \theta \left(1 + \frac{1}{(\theta-1)} \epsilon \log \epsilon + \epsilon \xi_1 \right) ; \quad p_1 = \epsilon \eta_1 , \quad (4.4)$$

$$\eta_1 = \exp \{ (\theta-1) \xi_1 - 1 \} + O(\epsilon \log^2 \epsilon) , \quad (4.5)$$

$$h_4 = \theta(1 + \xi_4) \quad ; \quad p_4 = \frac{\eta_4}{\epsilon} , \quad (4.6)$$

$$\eta_4 = \log(1 + \xi_4) - \theta \xi_4 + O(\epsilon \log \epsilon) . \quad (4.7)$$

Gebied I

$$\begin{aligned} T_I &= \int_{p_4}^{p_1} \frac{dp}{\left(\frac{dp}{dt}\right)} = \int_{p_4}^{p_1} \frac{\epsilon dp}{p(-1+h)} = \int_{p_4}^{p_1} \frac{\epsilon dp}{p(-1+\theta+\epsilon \frac{\theta}{(1-\theta)} \{L(p)-1\} + O(\rho_1^2(p)))} \quad (1) \\ &= \int_{p_4}^{p_1} \frac{\epsilon}{(\theta-1)p} \left[1 - \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \{1 - L(p)\} \right] dp + O(\epsilon \xi_4^2) = T_{IA} + T_{IB} + O(\epsilon \xi_4^2) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

(1) : uitwerking van $O(\rho_1^2(p))$ levert na integratie $O(\epsilon \xi_4^2)$, want er treedt de volgende integraal op

$$\int_{p_4}^{p_1} \epsilon \cdot \frac{\epsilon^2 p^2}{p} dp = \frac{\epsilon^3}{2} [\epsilon^2 \eta_1^2 - \frac{\eta_4^2}{\epsilon^2}] \sim \epsilon \eta_4^2 \sim \epsilon \xi_4^2.$$

$$T_{IA} = \int_{p_4}^{p_1} \frac{\epsilon dp}{(\theta-1)p} = \frac{\epsilon}{(\theta-1)} [\log(p)]_{p_4}^{p_1} =$$

$$\frac{\epsilon}{(\theta-1)} [\log \epsilon + \log(\eta_1) - \log(\eta_4) + \log \epsilon] =$$

$$\frac{\epsilon}{(\theta-1)} [\log \epsilon + ((\theta-1)\xi_1 - 1) + O(\epsilon \log^2 \epsilon)] +$$

$$\frac{-\epsilon}{(\theta-1)} [\log(\log(1+\xi_4) - \theta \xi_4) - \log \epsilon + O(\epsilon \log \epsilon)] \quad (4.9)$$

$$T_{IB} = \int_{p_4}^{p_1} \frac{\epsilon^2 \theta}{(1-\theta)^3} \left\{ \frac{1-L(p)}{p} \right\} dp = \frac{\epsilon^2 \theta}{(1-\theta)^3} \left[\frac{1}{2} \log^2(p) - p + \log(p) \right]_{p_4}^{p_1} =$$

$$O(\epsilon^2 \log^2 \epsilon) - \frac{\epsilon^2 \theta}{(1-\theta)^3} \left[\frac{1}{2} \log^2(\eta_4) + \frac{1}{2} \log^2 \epsilon - \log(\eta_4) \log \epsilon - \frac{\eta_4}{\epsilon} \right] =$$

$$O(\epsilon^2 \log^2 \epsilon) - \frac{\epsilon^2 \theta}{(1-\theta)^3} [O(1) + O(\log^2 \epsilon) + O(\log \epsilon) - \frac{\log(1+\xi_4) - \theta \xi_4}{\epsilon}] =$$

$$\frac{\epsilon \theta}{(1-\theta)^3} [\log(1+\xi_4) - \theta \xi_4] + O(\epsilon^2 \log^2 \epsilon). \quad (4.10)$$

Gebied II

$$T_{II} = \int_{h_1}^1 \frac{dh}{(\frac{dh}{dt})} = \int_{h_1}^1 \frac{dh}{h(1-p)} \stackrel{(1)}{=} \int_{h_1}^1 \frac{1+p}{h} dh + O(\epsilon^2) = T_{IIA} + T_{IIB} + O(\epsilon^2).$$

(1) : voor $p \in P_{II}$ geldt $p = O(\varepsilon)$; integratie is over begrensde interval.

$$T_{IIA} = \int_{h_1}^1 \frac{dh}{h} = [\log(h)]_{h_1}^1 = -\log(h_1) = -\log(\theta(1 + \frac{1}{(\theta-1)} \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon \xi_1)) =$$

$$-\log(\theta) - \frac{1}{(\theta-1)} \varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon \xi_1 + O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon).$$

$$T_{IIB} = \int_{h_1}^1 \frac{p dh}{h} \stackrel{(1)}{=} \int_{h_1}^1 \frac{\exp\{(L(h) - L(\theta) - \varepsilon) / \varepsilon\}}{h} (1+r_1) dh \stackrel{(2)}{=}$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{\varepsilon \exp\{(\theta-1)\xi - 1\}}{\theta} \varepsilon \theta (1+r_2) d\xi =$$

$$- \varepsilon^2 \left[\frac{\exp\{(\theta-1)\xi - 1\}}{(\theta-1)} \right]_{\xi_1}^{\xi_0} (1+r_3) = O(\varepsilon^2).$$

(1) : r_1, r_2, r_3 zijn resttermen met $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{r_i}{T_{IIB}} \right| = 0$, $i = 1, 2, 3$.

(2) : via substitutie $h = \theta(1 + \frac{1}{(\theta-1)} \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon \xi)$; $\xi_0 = \{\frac{1-\theta}{\theta} - \frac{\varepsilon \log \varepsilon}{(\theta-1)}\} / \varepsilon$.

Dus

$$T_{II} = -\log(\theta) - \frac{1}{(\theta-1)} \varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon \xi_1 + O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon). \quad (4.11)$$

Gebied IV

$$T_{IV} = \int_1^{h_4} \left(\frac{dh}{dt} \right) = \int_1^{h_4} \frac{dh}{h(1-p)} = \int_1^{h_4} \frac{dh}{h(1 - \frac{L(\theta) - L(h)}{\varepsilon} - 1 + O(\log \varepsilon))} =$$

$$\int_1^{h_4} \frac{\varepsilon dh}{h\{L(h) - L(\theta)\}} (1 + O(\varepsilon \log \varepsilon)) = T_{IVA} (1 + O(\varepsilon \log \varepsilon)). \quad (4.12)$$

$$T_{IVA} = \int_1^{h_4} \frac{\epsilon dh}{h\{L(h)-L(\theta)\}} \stackrel{(1)}{=} \int_{-\log(\theta)}^{\log(1+\xi_4)} \frac{-\epsilon dx}{x + \theta(1-e^x)} =$$

$$\int_{-\log(\theta)}^{\log(1+\xi_4)} \left[\left\{ \frac{-\epsilon}{x+\theta(1-e^x)} + \frac{\epsilon}{(1-\theta)x} \right\} + \left\{ \frac{-\epsilon}{(1-\theta)x} \right\} \right] dx = P + Q.$$

(1) : via substitutie $h = \theta e^x$.

$$P = \int_{-\log(\theta)}^{\log(1+\xi_4)} \left[\frac{-\epsilon}{x+\theta(1-e^x)} + \frac{\epsilon}{(1-\theta)x} \right] dx =$$

$$\left[\int_{-\log(\theta)}^0 + \int_0^{\log(1+\xi_4)} \right] \left\{ \frac{-\epsilon}{x+\theta(1-e^x)} + \frac{\epsilon}{(1-\theta)x} \right\} dx = P_1 + P_2.$$

$$P_1 = \epsilon \int_0^{-\log(\theta)} \left[\frac{1}{x+\theta(1-e^x)} - \frac{1}{(1-\theta)x} \right] dx = \epsilon I(\theta). \quad (4.13)$$

$$P_2 = -\epsilon \int_0^{\log(1+\xi_4)} \left\{ \frac{1}{x(1-\theta) - \frac{\theta}{2}x^2 + O(x^3)} - \frac{1}{(1-\theta)x} \right\} dx =$$

$$-\epsilon \int_0^{\log(1+\xi_4)} \frac{\theta}{2(1-\theta)^2} (1+O(x)) dx =$$

$$\frac{-\epsilon\theta}{2(1-\theta)^2} \log(1+\xi_4) + O(\epsilon \log^2(1+\xi_4)). \quad (4.14)$$

$$Q = \int_{-\log(\theta)}^{\log(1+\xi_4)} \frac{-\epsilon dx}{(1-\theta)x} = \frac{-\epsilon}{(1-\theta)} \left[\log(x) \right]_{-\log(\theta)}^{\log(1+\xi_4)} =$$

$$\frac{-\epsilon}{(1-\theta)} \left[\log(\log(1+\xi_4)) - \log(\log(\frac{1}{\theta})) \right]. \quad (4.15)$$

Sommatie van de gevonden bijdragen (4.9), (4.10), (4.11), (4.13), (4.14) en (4.15) en rekening houdend met (4.8) en (4.12) levert, met de notatie $T_{h \leq 1}$ voor dat gedeelte van de periode, waar $h \leq 1$ is.

$$\begin{aligned}
 T_{h \leq 1} &= -\log(\theta) + \varepsilon \log \varepsilon \left[\frac{1}{(\theta-1)} \right] + \\
 &\varepsilon \left[\frac{1}{(1-\theta)} + \frac{1}{(1-\theta)} \log(\log(\frac{1}{\theta})) + \frac{1}{(1-\theta)} \log(1-\theta) + I(\theta) \right] + \\
 &O(\varepsilon \xi_4^2) + O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon) .
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

De termen met ξ_1 en ξ_4 verdwijnen bij deze sommatie, want

$$\frac{\varepsilon}{(\theta-1)} [(\theta-1)\xi_1] - \varepsilon \xi_1 = 0$$

en

$$\begin{aligned}
 &\frac{\varepsilon}{(\theta-1)} [-\log(\log(1+\xi_4)) - \theta \xi_4] + \frac{\varepsilon \theta}{(1-\theta)^3} [\log(1+\xi_4) - \theta \xi_4] + \\
 &\frac{-\varepsilon \theta}{2(1-\theta)^2} \log(1+\xi_4) - \frac{\varepsilon}{(1-\theta)} \log(\log(1+\xi_4)) = \\
 &\frac{\varepsilon}{(\theta-1)} [-\log(1-\theta) - \log(\xi_4) + \frac{\xi_4}{2(1-\theta)} + O(\xi_4^2)] + \\
 &\frac{\varepsilon \theta}{(1-\theta)^3} [(1-\theta)\xi_4 + O(\xi_4^2)] - \frac{\varepsilon \theta}{2(1-\theta)^2} [\xi_4 + O(\xi_4^2)] - \frac{\varepsilon}{(1-\theta)} [\log(\xi_4) - \frac{1}{2}\xi_4 + O(\xi_4^2)] = \\
 &\frac{\varepsilon}{(1-\theta)} \log(1-\theta) + \varepsilon \log(\xi_4) \left[\frac{-1}{(\theta-1)} - \frac{1}{(1-\theta)} \right] + \\
 &\varepsilon \xi_4 \left[-\frac{1}{2(1-\theta)^2} + \frac{\theta}{(1-\theta)^2} - \frac{\theta}{2(1-\theta)^2} + \frac{1}{2(1-\theta)} \right] + O(\varepsilon \xi_4^2) = \\
 &\frac{\varepsilon}{(1-\theta)} \log(1-\theta) + O(\varepsilon \xi_4^2) .
 \end{aligned}$$

Het is mogelijk ook nog hogere ordetermen te berekenen; dit levert voor de eerste correctieterm

$$O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon) = - \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} \varepsilon^2 \log^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2 \log \varepsilon) . \quad (4.17)$$

Daar ξ_4 willekeurig is gekozen, valt de bijdrage $O(\varepsilon \xi_4^2)$ weg tegen de bijdragen, verkregen uit een verdere uitwerking van de integraties in gebied I en IV.

De bijdrage in de periode voor $h \geq 1$ is een functie onder andere van μ . Wegens symmetrie geldt $T_{h \geq 1}(\mu) = -T_{h \leq 1}(\mu)$, en dus voor de totale periode

$$\begin{aligned} T &= T_{h \leq 1}(\theta) + T_{h \geq 1}(\mu) = T_{h \leq 1}(\theta) - T_{h \leq 1}(\mu) = \\ &\log(\mu) - \log(\theta) + \varepsilon \log \varepsilon \left[\frac{1}{(\theta-1)} - \frac{1}{(\mu-1)} \right] + \\ &\varepsilon \left[\frac{1}{(1-\theta)} - \frac{1}{(1-\mu)} + \frac{1}{(1-\theta)} \log((1-\theta) \log(\frac{1}{\theta})) - \frac{1}{(1-\mu)} \log((\mu-1) \log(\mu)) + \right. \\ &\quad \left. I(\theta) - I(\mu) \right] + O(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$I(\alpha) = \int_0^{-\log(\alpha)} \left[\frac{1}{x + \alpha(1-e^x)} - \frac{1}{(1-\alpha)x} \right] dx \quad (4.18b)$$

Dit resultaat is dus geldig voor $\varepsilon \rightarrow 0$, bij een vaste θ , $0 < \theta < 1$. Bij een vaste kleine waarde van ε zal (4.18) betere overeenkomst geven voor kleine waarden van θ , zie (4.17).

5. Correctiefactor op formule van Volterra

Hebben wij in het vorige hoofdstuk de periode berekend voor kleine waarden van ϵ , nu zullen wij ons bezighouden met het geval dat ϵ willekeurig is, maar dat de parameter θ in de buurt van 1 ligt, dat wil zeggen, kleine verstoringen ten opzichte van het evenwichtspunt, en hiervoor zullen wij een correctiefactor bepalen op de formule van Volterra (1.9). Wij gaan daarom over naar een stelsel coördinaten, dat het evenwichtspunt (1,1) tot oorsprong heeft.

$$h = 1 - u \quad ; \quad p = 1 - v \quad (5.1)$$

(1.3) wordt dan

$$\frac{du}{dt} = - (1-u)v \quad (5.2a)$$

$$\epsilon \frac{dv}{dt} = (1-v)u \quad (5.2b)$$

$$u(0) = 1 - \theta \quad ; \quad v(0) = 0 \quad ; \quad 0 < \theta < 1 \quad (5.2c)$$

en relatie (1.5) gaat over in

$$-u - \log(1-u) + \epsilon(-v - \log(1-v)) = \theta - 1 - \log(\theta). \quad (5.3)$$

Daar de uitdrukking $-u - \log(1-u)$ voor u klein in eerste orde kwadratisch is, stellen wij

$$-u - \log(1-u) = \frac{s^2}{2} \quad ; \quad -v - \log(1-v) = \frac{r^2}{2}, \quad (5.4)$$

zodat geldt

$$s^2 + \epsilon r^2 = 2(\theta - 1 - \log(\theta)) = c^2 \quad (5.5)$$

en bovendien geldt

$$u \, v \, dt = -s \, ds \quad (5.6)$$

door differentiatie naar t van (5.4) en met behulp van (5.2a). De relatie (5.4) bepaalt de impliciet gedefiniëerde functie $u = \psi(s)$, met de afspraak $s > 0$, $u > 0$ en $s < 0$, $u < 0$. Met de techniek beschreven in hoofdstuk 3, kunnen voor $\psi(s)$ de volgende representaties gegeven worden

$$\psi(s) = -\frac{1}{2}s^2 - \log\left(1+\frac{s^2}{2}\right) - \frac{\log\left(1+\frac{s^2}{2}\right)}{\left(1+\frac{s^2}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{n,m} \left(\log\left(1+\frac{s^2}{2}\right)\right)^{n-m} \left(1+\frac{s^2}{2}\right)^{-n}$$

$$\text{voor } d_{n,m} \text{ zie (3.17c)} ; s < -\alpha_1, \alpha_1 > 0 \quad (5.7)$$

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n s^n ; -\alpha_2 < s < \alpha_2, \alpha_2 = 2\sqrt{\pi} \quad (5.8a)$$

$$l_n = \frac{2^{-n/2}}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \frac{x}{\sqrt{-x - \log(1-x)}} \right\}^n \right]_{x=0} \quad (5.8b)$$

$$\psi(s) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \left\{ \exp\left(-\left(1 + \frac{s^2}{2}\right)\right) \right\}^n ; s > 0 \quad (5.9)$$

De α_1, α_2 worden bepaald door de convergentie eigenschappen van de verschillende representaties. De waarde van $\alpha_2 = 2\sqrt{\pi}$ volgt uit een beschouwing in het complexe vlak; er geldt door middel van een iets zuinigere afschatting dan na formule (3.15) dat $\alpha_1 < \alpha_2$, zodat de drie representaties elkaar overlappen.

De afleiding van (5.7) en (5.9) is essentiëel dezelfde als die bij de behandeling van gebied IV, respectievelijk II. Voor (5.8) moet er rekening mee gehouden worden, dat $-u - \log(1-u)$ voor een omgeving van $u = 0$ kwadratisch is; daarom voeren wij in $w = \sqrt{-z - \log(1-z)}$.

In Appendix I zijn de eerste coëfficiënten l_1, l_2, l_3 berekend en wordt een recurrente betrekking tussen de l_n 's gegeven.

Wij zullen ons bezighouden met kleine verstoringen en dus representatie (5.8), en daarvan slechts de eerste twee termen gebruiken in asymptotische zin. Wij zullen daarbij ons de vrij arbitraire beperking opleggen, dat wij (5.8) alleen gebruiken voor $|s| < 1$, dus

$$\psi(s) = s - \frac{1}{3}s^2 + O(s^3), \quad |s| < 1 \quad (5.10)$$

Met behulp van (5.5) en (5.6) kan de periode nu geschreven worden als

$$T = \int_C^{-C} \frac{-s \, ds}{\psi(s)\psi(\sqrt{\frac{C^2-s^2}{\epsilon}})} + \int_{-C}^C \frac{-s \, ds}{\psi(s)\psi(-\sqrt{\frac{C^2-s^2}{\epsilon}})} \quad (5.11)$$

Wij krijgen een benaderde waarde voor $T : T_{app}$, indien wij (5.10) gebruiken, waarbij wij dus eisen

$$C < 1 \quad ; \quad \epsilon > C^2 \quad (5.12)$$

en dat geeft dan, voor $T_{app} = T_1 + T_2$, met T_1 de eerste, T_2 de tweede integraal in (5.11), waarin de substitutie (5.10) is uitgevoerd

$$T_1 = \int_{-C}^C \frac{s \, ds}{(s - \frac{1}{3}s^2) (\sqrt{\frac{C^2-s^2}{\epsilon}} - \frac{1}{3} \frac{C^2-s^2}{\epsilon})} = \quad (1)$$

$$K \int_0^\infty \frac{(1+t^2)dt}{(t^2+\alpha)(t^2+\beta t+1)} \quad , \quad (5.13)$$

met

$$K = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{1+C/3} \quad ; \quad \alpha = \frac{1-C/3}{1+C/3} \quad ; \quad \beta = -\frac{2C}{3\sqrt{\epsilon}} \quad (5.14)$$

(1) : via substitutie $s = C \cos(2\arctg(t))$.

Uitwerking van (5.13) levert

$$T_1 = K \int_0^\infty \left[\frac{at+b}{t^2+\alpha} + \frac{ct+d}{t^2+\beta t+1} \right] dt \quad (5.15)$$

met

$$a = \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha\beta^2 + (\alpha-1)^2} \quad ; \quad b = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha\beta^2 + (\alpha-1)^2} \quad (5.16a)$$

$$c = \frac{-\beta(\alpha-1)}{\alpha\beta^2 + (\alpha-1)^2} \quad ; \quad d = \frac{\beta^2}{\alpha\beta^2 + (\alpha-1)^2} \quad (5.16b)$$

De integratie kan nu gemakkelijk worden uitgevoerd. Het resultaat luidt

$$T_1 = \frac{Ka}{2} \left[\log(|t^2 + \alpha|) + \frac{2b}{a\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}} \right) + \right. \\ \left. -\log(|t^2 + \beta t + 1|) + \frac{(\beta + 2d/a)}{\sqrt{1 - \beta^2/4}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t + \beta/2}{\sqrt{1 - \beta^2/4}} \right) \right]_0^\infty = \\ \frac{Ka}{2} \left[-\log(|\alpha|) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{2b}{a\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{(\beta + 2d/a)}{\sqrt{1 - \beta^2/4}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\beta/2}{\sqrt{1 - \beta^2/4}} \right\} \right]. \quad (5.17)$$

Voor T_2 geldt een analoge betrekking, met evenwel de volgende constanten

$$\bar{K} = K ; \quad \bar{\alpha} = \alpha ; \quad \bar{\beta} = -\beta \quad (5.18a)$$

$$\bar{a} = -a ; \quad \bar{b} = b ; \quad \bar{c} = -c ; \quad \bar{d} = d . \quad (5.18b)$$

Sommatie geeft uiteindelijk

$$T_{app} = \frac{\pi K b}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi K (a\beta + 2d)}{2\sqrt{1 - \beta^2/4}} = \\ \frac{\pi K}{(\alpha\beta^2 + (\alpha - 1)^2)} \left\{ \frac{(\alpha - 1)^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta^2(\alpha + 1)}{2\sqrt{1 - \beta^2/4}} \right\} = \\ 2\pi\sqrt{\epsilon} \left[\frac{1}{\left[\frac{1 - C^2/9}{\epsilon} + 1 \right]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - C^2/9}} + \frac{1}{\epsilon\sqrt{1 - C^2/(9\epsilon)}} \right\} \right]. \quad (5.19)$$

Dit is het resultaat (1.10), geldig onder de voorwaarden van (5.12) : $C < 1$, $\epsilon > C^2$. Als nu nog extra geëist wordt: $C^2/9 \ll 1$, en $C^2/(9\epsilon) \ll 1$, dan geldt

$$T_{app} \approx 2\pi\sqrt{\epsilon} \left[\frac{1}{\left[\epsilon^{-1} + 1 \right]} \left\{ 1 + \epsilon^{-1} \right\} \right] = 2\pi\sqrt{\epsilon} ,$$

in overeenstemming met resultaat Volterra (1.9).

6. Behandeling als singulier storingsprobleem

In dit hoofdstuk zullen wij het systeem (1.3) voor ϵ klein bekijken vanuit het gezichtspunt van de singuliere storingstheorie en daarbij stellingen van Tikhonov en Vasil'eva formuleren en toepassen. Het blijkt mogelijk te zijn de functies $h = h(t)$, $p = p(t)$ over een bepaald stuk van de kromme (1.5) uniform in t te benaderen. Wij beschouwen hier alleen autonome systemen; het is ook mogelijk niet-autonome systemen te behandelen met deze stellingen, zie hiervoor de vermelde literatuur.

Wij beschouwen het systeem

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (6.1a)$$

$$\epsilon \frac{dy}{dt} = g(x,y) \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad (6.1b)$$

met x, y vectoren en f, g voldoende gladde functies. Zij de vector $z(t)$ de notatie voor $(x(t), y(t))$. Beschouw het gereduceerde systeem, waarin ϵ is nul gesteld

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (6.2a)$$

$$0 = g(x,y) . \quad (6.2b)$$

Daar (6.2) van lagere orde is dan (6.1) zal de oplossing van (6.2) in het algemeen niet voldoen aan $y(0) = y_0$. Wij vragen ons af of de oplossing van (6.1) nadert tot de oplossing van (6.2) voor $\epsilon \rightarrow 0$, met andere woorden voldoet de limietoplossing van (6.1), als deze bestaat, aan (6.2). Daar $g(x,y) = 0$ meerdere wortels kan hebben, willen wij verder weten naar welke wortel de oplossing $y(t)$ van (6.1) gaat voor $\epsilon \rightarrow 0$.

De stellingen van Tikhonov [13] en Vasil'eva [15] zijn nu toepasbaar, zie ook O'Malley [10]; de laatste stelling geeft een constructieprocedure aan voor de oplossing van (6.1) in de vorm van een asymptotische machtreeks.

Om deze stellingen te kunnen formuleren, geven wij eerst enige definities.

Definitie 6.1

Zij $y = \phi(x)$ een oplossing van $g(x,y) = 0$ op een gesloten, begrensde gebied D . Wij zullen de oplossing van (6.2) overeenkomend met deze wortel en x_0 voorgescreven, aangeven met $\bar{z}(t) = (\bar{x}(t), \phi(\bar{x}(t)))$.

Definitie 6.2

De wortel $y = \phi(x)$ heet geïsoleerd op D , als er een positief getal γ bestaat, zo dat $g(x,y) = 0$ geen andere wortel heeft dan $y = \phi(x)$ voor $||y - \phi(x)|| < \gamma$.

Definitie 6.3

In systeem (6.1) zal $y(t)$ sneller veranderen dan $x(t)$ voor ϵ klein. Wij noemen daarom het systeem, waarin de tijdsas is aangepast aan deze snelle verandering door de transformatie $\tau = t/\epsilon$, het geadjungeerde (of grenslaag-) systeem:

$$\frac{dx}{d\tau} = \epsilon f(x,y) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (6.3a)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x,y) \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad (6.3b)$$

Indien ϵ wordt nul gesteld in (6.3) levert dit de grenslaag-vergelijking

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x_0,y) \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad (6.4)$$

Definitie 6.4

Wij geven enige stabiliteitsdefinities, zie hiervoor Massera [11] en Hoppensteadt [7]. Beschouw het systeem $\dot{x} = f(x,a)$, x , a vectoren, a parameter, met $f(0,a) = 0$ en verder f continu voor $||x|| \leq M$, $||a|| \leq N$, of $a \in D$, begrensd en gesloten en stel dat er een eenduidige oplossing bestaat, continu afhankelijk van de beginvoorwaarden. $x = F(t, x_0, a)$ is de algemene oplossing van $\dot{x} = f(x,a)$ met $x_0 = F(0, x_0, a)$. Wij geven de definities ten opzichte van de oplossing $x \equiv 0$.

(A) Uniform in de tijd stabiel in de zin van Lyapunov (L):

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, a) > 0 \quad \rightarrow \quad ||F(t, x_0, a)|| < \epsilon \quad \text{voor}$$

$$||x_0|| < \delta, \quad t \geq 0$$

(AU) Uniform in de tijd stabiel (L), uniform in a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \rightarrow \quad ||F(t, x_0, a)|| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$||x_0|| < \delta, \quad t \geq 0, \quad \forall a \in D$$

(B) Uniform asymptotisch stabiel:

(A) +

$$\exists \delta = \delta(a) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T = T(\varepsilon) \quad \rightarrow \quad ||F(t, x_0, a)|| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$||x_0|| < \delta \quad t \geq T(\varepsilon)$$

(BU) Uniform asymptotisch stabiel, uniform in a:

(AU) + (uniform invloedsgebied over D)

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T = T(\varepsilon) \quad \rightarrow \quad ||F(t, x_0, a)|| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$||x_0|| < \delta, \quad t \geq T(\varepsilon), \quad \forall a \in D$$

Hoppensteadt [7] bewijst de volgende stelling

Stelling 6.1

Indien voor de oplossing $x \equiv 0$ van het systeem $\dot{x} = f(x, a)$, voor alle a , $a \in D$

(B) geldt dan geldt voor $x \equiv 0$ ook (AU).

Definitie 6.5

Een geïsoleerde wortel $y = \phi(x)$ heet stabiel in D, als voor alle punten $x^* \in D$, de punten $y^* = \phi(x^*)$ asymptotisch stabiele kritieke punten zijn voor de grenslaagvergelijking (6.4), $\tau \rightarrow \infty$, uniform voor $(x^*, y^*) \in D$, dat wil zeggen

$$1. \quad g(x^*, y^*) = 0$$

2. voor y^* geldt (BU) met x^* opgevat als parametervector a, dus

$$2a. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \rightarrow \quad ||y(\tau) - y^*|| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$||y(0) - y^*|| < \delta, \quad \tau \geq 0, \quad \forall x^* \in D;$$

$$2b. \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T = T(\varepsilon) \quad \rightarrow \quad ||y(\tau) - y^*|| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$||y(0) - y^*|| < \delta, \quad \tau \geq T(\varepsilon), \quad \forall x^* \in D.$$

Definitie 6.6

Een punt $z_0 = (x_0, y_0)$ ligt in het invloedsgebied van de stabiele wortel $y = \phi(x)$, als de oplossing van de grenslaagvergelijking (6.4) met $y(0) = y_0$ voorgeschreven, nadert tot de waarde $y = \phi(x_0)$, $\tau \rightarrow \infty$; dus in het algemeen is $y_0 \neq \phi(x_0)$.

Stelling 6.2 (Tikhonov)

Zij voldaan aan de volgende voorwaarden:

1. $y = \phi(x)$ is een wortel van $g(x, y) = 0$, continu, geïsoleerd en stabiel in een gesloten, begrensd gebied D .
2. het punt $z_0 = (x_0, y_0)$ ligt in het invloedsgebied van deze wortel.
3. de oplossing $\bar{z}(t)$ van (6.2) is uniek en ligt in D voor $0 \leq t \leq T$, dan zal de oplossing van (6.1) convergeren naar de oplossing van (6.2) voor $\epsilon \rightarrow 0$, en wel zo dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t) = \bar{x}(t), \quad 0 \leq t \leq T_0 < T,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t) = \bar{y}(t) = \phi(\bar{x}(t), t), \quad 0 < t \leq T_0 < T,$$

met T_0 willekeurig dicht bij T .

Stilzwijgend is aangenomen dat (6.1) een uniek bepaalde oplossing heeft. De limietoplossing voor $\epsilon \rightarrow 0$ zal in het algemeen discontinu zijn voor $t = 0$, tenzij toevallig $y_0 = \phi(x_0)$, anders zal er een grenslaag ontstaan.

Tikhonov eiste oorspronkelijk niet de uniformiteit in $(x^*, y^*) \in D$ voor de asymptotische stabiliteit van de wortel $y^* = \phi(x^*)$. Hoppensteadt [7] toonde aan, dat dit wel noodzakelijk is.

Gezien stelling 6.1 is het mogelijk de uniformiteit in $(x^*, y^*) \in D$ te laten vallen voor de eis 2a. (AU) in definitie 6.5, maar niet voor de eis 2b. Want indien men enkel stabiliteit eist (A), samen met de eis 2b., dan heeft men juist de voorwaarden voor stelling 6.1, dus dan geldt toch (AU).

Met een extra eis, namelijk dat de eigenwaarden van de matrix

$$(g_y)_{y=\phi(x)} = \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right)_{y=\phi(x)} \quad (6.5)$$

negatief reële delen bezitten, kunnen wij een successieve constructieprocedure uitvoeren.

Stelling 6.3 (Vasil'eva)

Laat voldaan zijn aan de eisen van stelling 6.2 en aan eis (6.5), dan geldt voor de oplossing van (6.1) $z(t, \epsilon)$, dat deze geschreven kan worden als

$$z(t, \epsilon) = (\bar{z})_N + (z)_N - (\tilde{z})_N + O(\epsilon^{N+1})$$

met $(\bar{z})_N$, $(z)_N$, $(\tilde{z})_N$ machtreeksen tot en met de orde N . $(z)_N$ stelt de grenslaag oplossing voor; $(\bar{z})_N$ stelt de oplossing buiten de grenslaag voor en $(\tilde{z})_N$ geeft de ontwikkeling naar machten van ϵ van $(\bar{z}(\epsilon\tau))_N$.

De constructie verloopt als volgt

I. Grenslaag.

Stel $t = \epsilon\tau$, $x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\tau)\epsilon^k$, $y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\tau)\epsilon^k$;

substitutie in (6.3) en machten van ϵ gelijk stellen geeft

$$\frac{dx_k}{d\tau} = f_{k-1}(\tau) \quad ; \quad x_0(0) = x(0) \quad ; \quad x_k(0) = 0 \quad , \quad k \geq 1$$

$$\frac{dy_k}{d\tau} = g_k(\tau) \quad ; \quad y_0(0) = y(0) \quad ; \quad y_k(0) = 0 \quad , \quad k \geq 1$$

met

$$f(x(\tau), y(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\tau)\epsilon^k \quad ; \quad f_{-1}(\tau) \equiv 0$$

$$g(x(\tau), y(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\tau)\epsilon^k .$$

II. Buiten de grenslaag.

Stel $\bar{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}_k(t)\epsilon^k$, $\bar{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k(t)\epsilon^k$; substitutie in (6.1) en

machten van ϵ gelijk stellen geeft

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = \bar{f}_k(t) \quad ; \quad \bar{x}_0(0) = x(0)$$

$$\bar{g}_k(t) = \frac{d\bar{y}_{k-1}}{dt} \quad ; \quad \bar{y}_{-1}(t) \equiv 0 \quad ; \quad \bar{y}_0(t) = \phi(\bar{x}_0(t)) ,$$

de andere beginvoorwaarden volgen uit aanpassing met I; wij hebben gesteld

$$f(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{f}_k(t) \epsilon^k$$

$$g(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{g}_k(t) \epsilon^k .$$

Wij zullen nu de stellingen 6.2 en 6.3 toepassen op probleem (1.3).

Noem $h = x$, $p = y$ en zij het gebied

$$D_\theta = \{(x, y, t) \mid \delta_1 \leq x \leq 1 - \delta_2 , \quad \delta_1, \delta_2 > 0, \text{ willekeurig}; 0 \leq y \leq 1; \\ 0 \leq t \leq T' = T'(\theta) = \log\left(\frac{1-\delta_2}{\theta}\right)\} .$$

Vergelijking (6.1) luidt dan

$$\frac{dx}{dt} = x(1-y) \quad ; \quad x(0) = \theta$$

$$\epsilon \frac{dy}{dt} = y(-1+x) \quad ; \quad y(0) = 1 ,$$

en vergelijking (6.2)

$$\frac{dx}{dt} = x(1-y) \quad ; \quad x(0) = \theta$$

$$0 = y(-1+x)$$

en (6.4)

$$\frac{dy}{d\tau} = y(-1+\theta) \quad ; \quad y(0) = 1 .$$

Wij gaan de voorwaarden voor de stellingen na. De wortel $y = \phi(x) = 0$ is de enige wortel in D_θ , dus geïsoleerd, continu en stabiel, want voor alle $x^* \in D$, met $y^* = \phi(x^*) = 0$ geldt

$$1. \quad g(x^*, 0) = 0 ,$$

$$2a. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon > 0 \quad \rightarrow \quad |y_0 e^{(-1+\theta)\tau}| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$|y_0| < \delta \quad , \quad \tau \geq 0 \quad , \quad \forall x^* \in D ;$$

$$2b. \quad \exists \delta = 1 > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T = -\log \varepsilon / \delta_2 \quad \rightarrow \quad |e^{(-1+\theta)\tau}| < \varepsilon \quad \text{voor}$$

$$|y(0) - y^*| = |1 - 0| = \delta, \quad \tau \geq T(\varepsilon), \quad \forall x^* \in D .$$

Verder ligt het punt $(x_0, y_0) = (\theta, 1)$ in het invloedsgebied van de wortel $y = 0$, zie onder 2b. En tenslotte is de oplossing $\bar{z}(t)$ van (6.2) uniek

en ligt in D_θ voor $0 \leq t \leq T' = \log(\frac{1-\delta_2}{\theta})$, dus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t) = \theta e^t \quad , \quad \text{voor } 0 \leq t \leq T_0 < T' \quad \text{en}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t) = 0 \quad , \quad 0 < t \leq T_0 < T' .$$

Wij voeren nu de constructieprocedure van Vasil'eva uit, want ook is voldaan aan de eis (6.5) : $(g_y)_{y=0} = -1 + x < -\delta_2 < 0$.

$$I. \quad \frac{dx_0}{d\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = \theta \quad ,$$

$$\frac{dy_0}{d\tau} = y_0(-1+x_0) = y_0(-1+\theta) \quad \rightarrow \quad y_0 = e^{(-1+\theta)\tau} \quad ,$$

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_0(1-y_0) = \theta(1-e^{(-1+\theta)\tau}) \quad \rightarrow \quad x_1 = \theta\left(\tau - \frac{e^{(-1+\theta)\tau}}{(\theta-1)} + \frac{1}{(\theta-1)}\right) \quad ,$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [y(-1+x)] \right\}_{x_0, y_0} x_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [y(-1+x)] \right\}_{x_0, y_0} y_1 =$$

$$e^{(-1+\theta)\tau} \left\{ \theta \left[\tau - \frac{e^{(-1+\theta)\tau} - 1}{(\theta-1)} \right] \right\} + (-1+\theta)y_1 \rightarrow$$

$$y_1 = e^{(-1+\theta)\tau} \left\{ \theta \left[\frac{\tau^2}{2} - \frac{e^{(-1+\theta)\tau} - (\theta-1)\tau}{(\theta-1)^2} \right] \right\} + \frac{\theta}{(\theta-1)^2}.$$

$$\text{II. } \frac{d\bar{x}_0}{dt} = \bar{x}_0(1-\bar{y}_0) = \bar{x}_0,$$

$$\frac{d\bar{y}_{-1}}{dt} = 0 = \bar{y}_0(-1+\bar{x}_0) \rightarrow \bar{y}_0 = 0, \quad \bar{x}_0 = \theta e^t.$$

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [x(1-y)]_{\bar{x}_0, \bar{y}_0} \right\} \bar{x}_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [x(1-y)]_{\bar{x}_0, \bar{y}_0} \right\} \bar{y}_1 = \bar{x}_1 + (\theta e^t) \bar{y}_1,$$

$$\frac{d\bar{y}_1}{dt} = 0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [y(-1+x)]_{\bar{x}_0, \bar{y}_0} \right\} \bar{x}_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [y(-1+x)]_{\bar{x}_0, \bar{y}_0} \right\} \bar{y}_1 = (-1+\theta e^t) \bar{y}_1.$$

$$\rightarrow \bar{y}_1 = 0, \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_1(0) e^t.$$

Aanpassing II aan I geeft:

$$x(\tau) \text{ is voor } \tau \rightarrow \infty \quad x(\tau) \sim \theta + \theta \epsilon \tau + \epsilon \frac{\theta}{(\theta-1)}$$

$$\bar{x}(t) \text{ is voor } t = \epsilon \tau \quad x(\epsilon \tau) = \theta + \theta \epsilon \tau + \epsilon \bar{x}_1(0) + O(\epsilon^2), \text{ dus}$$

$$\bar{x}_1(0) = \frac{\theta}{(\theta-1)}; \text{ deze waarde volgt ook uit formule (6.11) bij O'Malley [10].}$$

De uniforme benadering in t luidt dus

$$x(t) = \epsilon \frac{\theta e^{(-1+\theta)t/\epsilon}}{(1-\theta)} + \theta e^t + \epsilon \frac{\theta}{(\theta-1)} e^t + O(\epsilon^2) \quad (6.6a)$$

$$y(t) = e^{(-1+\theta)t/\epsilon} + \epsilon \left[e^{(-1+\theta)t/\epsilon} \left\{ \theta \left(\frac{t^2}{2\epsilon^2} - \frac{e^{(-1+\theta)t/\epsilon} - (\theta-1)t/\epsilon}{(\theta-1)^2} \right) \right\} + \frac{\theta}{(\theta-1)^2} \right] + O(\epsilon^2). \quad (6.6b).$$

Het is ook mogelijk het gebied D_θ zodanig te vergroten, dat elke willekeurige beginwaarde (h_0, p_0) , met $h_0 < 1$ behandeld kan worden. De ontwikkelingen beginnen voor $t = 0$ dan ook in dat punt. Voor $h_0 > 1$ zou men met negatieve tijd moeten rekenen.

7. Numerieke resultaten

Wij geven nu een overzicht van enige numerieke berekeningen op de EL-X8 van het Mathematisch Centrum. Allereerst vergelijken wij formule (1.7) (μ_{app}) met de resultaten van een nulpuntprocedure (μ_{num}), zie tabel 1.

Tabel 1

θ	C	μ_{app}	μ_{num}
.10	1.674 86	3.740 4	3.715 0
.25	1.128 09	2.592 1	2.586 7
.50	0.621 53	1.757 0	1.756 4
.75	0.274 53	1.300 22	1.300 20
.90	0.103 54	1.107 146 9	1.107 146 5
.99	0.010 034	1.010 067 114 4	1.010 067 114 3

De numerieke berekeningen voor de perioden zijn op twee verschillende wijzen uitgevoerd: directe integratie met behulp van een Runge-Kutta schema (zie Zonneveld [19], procedure RK4na) en een methode, gebaseerd op de impliciete relatie (1.5) en een nulpuntprocedure. Beide methoden gaven dezelfde resultaten in de gewenste nauwkeurigheid.

De resultaten voor (1.10) (T_{app}) zijn vergeleken met de formule van Volterra (T_{vol}) en de numerieke berekening (T_{num}). De gecorrigeerde formule geeft inderdaad het beste resultaat voor ε veel groter dan C^2 , en C veel kleiner dan 1, zie tabel 2.

Tenslotte zijn de resultaten voor (1.14) (T_{as}), vergeleken met de numerieke berekening (T_{num}); (1.14) geeft voor kleine ε en kleine θ het beste resultaat, zoals ook te verwachten was uit de voorafgaande analyse (4.17), zie tabel 3.

Tabel 2

θ		$\epsilon = 10$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = .1$	$\epsilon = .05$	c^2
.99	T_{num}	19.869 273	6.283 238	1.987 009	1.405 087	0.000 1
	T_{app}	19.869 299	6.283 256	1.987 040	1.405 128	
	T_{vol}	19.869 177	6.283 185	1.986 918	1.404 963	
.90	T_{num}	19.878 940	6.288 800	1.996 693	1.418 173	0.011
	T_{app}	19.882 205	6.290 678	2.000 047	1.422 847	
	T_{vol}	19.869 177	6.283 185	1.986 918	1.404 963	
.75	T_{num}	19.937 868	6.322 708	2.056 095	1.498 869	0.075
	T_{app}	19.961 235	6.336 188	2.084 280	1.545 998	
	T_{vol}	19.869 177	6.283 185	1.986 918	1.404 963	

Tabel 3

ϵ	$\theta = .50$		$\theta = .25$		$\theta = .10$	
	T_{as}	T_{num}	T_{as}	T_{num}	T_{as}	T_{num}
.5	3.5359	4.6599	4.7247	5.1734	5.8567	6.0920
.1	2.2470	2.3480	3.1303	3.1433	4.3014	4.3061
.05	1.8668	1.8875	2.8015	2.8009	4.00945	4.00939
.01	1.4320	1.4303	2.4612	2.4606	3.71766	3.71747
.005	1.3557	1.3548	2.4058	2.4055	3.67143	3.67136
.001	1.2816	1.2815	2.35364	2.35362	3.628628	3.628622

8. Literatuur

- [1] M.S. Bartlett,
On theoretical models for competitive and predatory biological
systems,
Biometrika 44 (1957), 27 - 42
- [2] N.G. de Bruyn,
Asymptotic methods in analysis,
Amsterdam, North-Holland Publ.Co. (1958)
- [3] E.T. Copson,
An introduction to the theory of functions of a complex variable,
London, Oxford University Press (1948)
- [4] W.J. Cunningham,
Simultaneous nonlinear equations of growth,
Bull. of Math. Bioph. 17 (1955), 101-110
- [5] T.V. Davies, E.M. James,
Nonlinear differential equations,
London, Addison-Wesley (1966)
- [6] J. Grasman, E. Veling,
An asymptotic formula for the period of a Volterra-Lotka system,
Mathematisch Centrum rapport TN 70 (1972), te verschijnen in
Math. Biosciences
- [7] F. Hoppensteadt,
Stability in systems with parameter,
J. Math. Anal. Appl. 18 (1967), 129-134

- [8] H. Klomp,
Experimenten en modellen in de populatie-dynamiek,
in Populatiebiologie (D.J. Kuenen (ed.)),
Wageningen, Centrum voor Landbouwkunde en Landbouwpublicaties (1967)
- [9] A.J. Lotka,
Elements of physical biology,
Baltimore Maryland, Williams & Wilkins (1925) [Dover (1956)]
- [10] R.E. O'Malley,
Topics in singular perturbations,
Advances in Mathematics 2 (1967), 365-470
- [11] J.L. Massera,
Contributions to stability theory,
Ann. Math. 64 (1956), 182-206
- [12] A. Rescigno, I.W. Richardson,
The struggle for life: I Two species,
Bull. of Math. Bioph. 29 (1967), 377-388
- [13] A.N. Tikhonov,
Systems of differential equations containing small parameters in
the derivatives,
Math. Sb. 31 (1952), 575-586 (russisch)
- [14] W.R. Utz, P.E. Waltman,
Periodicity and boundedness of solutions of generalized differen-
tial equations of growth,
Bull. of Math. Bioph. 25 (1963), 75-93
- [15] A.B. Vasil'eva,
Asymptotic behaviour of solutions to certain problems involving
nonlinear differential equations containing a small parameter
multiplying the highest derivatives,
Russian Math. Surveys 18 (1963), 13-84

- [16] V. Volterra,
Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie,
Paris, Gauthier - Villars (1931)
- [17] P.E. Waltman,
The equations of growth,
Bull. of Math. Bioph. 26 (1964), 39-43
- [18] E.M. Wright,
Solution of the equation $ze^z = a$,
Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, A, 65 (1959), 193-203
- [19] J.A. Zonneveld,
Automatic numerical integration,
Math. Centre Tracts 8,
Amsterdam, Math. Centre (1964)

9. Appendix

$$\underline{\text{I.}} \quad \mu = 1 + C + \frac{1}{3}C^2 + \frac{1}{36}C^3 + O(C^4), \quad C \rightarrow 0 \quad (9.1a)$$

$$C = \sqrt{2(\theta - 1 - \log(\theta))} \quad (9.1b)$$

μ voldoet aan de relatie $L(\mu) = L(\theta)$, dat wil zeggen $\mu - \log(\mu) = \theta - \log(\theta)$. Stel $\mu = 1 - u$, $u < 0$, dan voldoet u aan $-u - \log(1-u) = \theta - 1 - \log(\theta) = C^2/2$; ontwikkelen naar u geeft

$$u^2 + \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{4}u^4 + \frac{2}{5}u^5 + \dots = C^2 \quad (9.2)$$

Stel $u = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n$, met $x^2 = C^2$; differentiatie van $-u - \log(1-u) = x^2/2$, naar x geeft

$$u \frac{du}{dx} = x(1-u) \quad (9.3)$$

en dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n \sum_{m=1}^{\infty} m l_m x^{m-1} = x - \sum_{m=2}^{\infty} l_{m-1} x^m, \quad (9.4)$$

machten van x gelijk stellen geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} n l_n l_{m-n+1} = -l_{m-1}, \quad m \geq 2. \quad (9.5)$$

Daar $l_1 = 1$, vinden wij $l_2 = -\frac{1}{3}$ en

$$l_m = -\frac{l_{m-1}}{m+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{m-1} l_n l_{m-n+1}, \quad m \geq 3 \quad (9.6)$$

en dus $l_1 = 1$, $l_2 = -\frac{1}{3}$, $l_3 = \frac{1}{36}$, $l_4 = \frac{1}{270}$. Voor $u < 0$ hebben wij de wortel $x = -C$ en dit geeft tenslotte (9.1).

$$\text{II. } a_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{x}{\log(1+\frac{x}{\theta}) - x} \right]_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log(1+\frac{x}{\theta}) - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\frac{1}{\theta}-1)x + o(x^2)} = \frac{\theta}{(1-\theta)} ;$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{\log(1+\frac{x}{\theta}) - x} \right]^2 \right]_{x=0} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} [(2x)\{\log(1+\frac{x}{\theta}) - x\}^{-2} + x^2(-2)\{\log(1+\frac{x}{\theta}) - x\}^{-3} (\frac{1}{\theta+x} - 1)] =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^2}) x^3 + o(x^4)}{(\frac{1}{\theta}-1)^3 x^3 + o(x^4)} = \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} .$$

$$\text{III. } d_{0,0} = \frac{1}{0!} \left[\binom{1}{0} \left[\frac{e^x x^2}{(e^x-1)^2} \right]_{x=0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x x^2}{(e^x-1)^2} = 1 ;$$

$$d_{1,0} = \frac{1}{1!} \left[\binom{2}{0} \left[\frac{d}{dx} \frac{e^x x^3}{(e^x-1)^3} \right]_{x=0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x x^3 (e^x-1)^3 + 3x^2 e^x (e^x-1)^3 - 3e^x x^3 (e^x-1)^2 e^x}{(e^x-1)^6} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^6 + o(x^7)}{x^6 + o(x^7)} = -\frac{1}{2} ;$$

$$d_{1,1} = \frac{1}{0!} \left[\binom{2}{1} \left[\frac{e^x x^3}{(e^x-1)^3} \right]_{x=0} - \binom{1}{0} \left[\frac{x^2}{(e^x-1)^2} \right]_{x=0} \right] = 2 - 1 = 1 .$$

IV. Wij geven nu een techniek om de weinig hanteerbare expliciete uitdrukkingen voor de coëfficiënten a_n en $d_{n,m}$ (3.5b), (3.17c) via recurrente betrekkingen gemakkelijk te berekenen. Zie hiervoor ook Wright [18] .

Beschouw $w = z - \log(z)$; $w_0 = w(z_0)$; $\gamma = w - w_0$; er geldt voor $z(w)$

$$z(w) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k (w-w_0)^k ; \quad Q_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k z}{dw^k} \right]_{w=w_0} \quad (9.7)$$

en

$$\frac{dz}{dw} = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-1} = \frac{z}{z-1} ; \quad \frac{d}{dw} = \frac{z}{z-1} \frac{d}{dz} \quad (9.8)$$

dus

$$Q_1 = \frac{z_0}{z_0 - 1} = 1 + t ; \quad t = \frac{1}{z_0 - 1} \quad (9.9)$$

en

$$Q_k = -\frac{(t^3 + t^2)}{k} \frac{d}{dt} Q_{k-1}(t) , \quad k \geq 2 . \quad (9.10)$$

Uit (9.9) en (9.10) volgt nu voor algemene Q_k

$$Q_k = (-1)^{k+1} \sum_{h=k}^{2k-1} b_{kh} t^h ; \quad k \geq 2 ; \quad b_{kh} > 0 . \quad (9.11)$$

Substitutie van t en ontwikkelen naar z_0 , geeft voor $|z_0| > 1$

$$Q_k = (-1)^{k+1} \sum_{m=k}^{\infty} a_{mk} z_0^{-m} ; \quad k \geq 2 ; \quad a_{mk} > 0 \quad (9.12)$$

Voor Q_1 geldt

$$Q_1 = \frac{z_0}{z_0 - 1} = \frac{1}{1 - z_0^{-1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_0^{-m} \quad (9.13)$$

dus $a_{m1} = 1$, $m \geq 1$, en met behulp van (9.10)

$$k Q_k = \left[\frac{d}{dw} Q_{k-1} \right]_{w=w_0} = \frac{z_0}{z_0 - 1} \left[\frac{d}{dz} Q_{k-1} \right]_{z=z_0} \quad (9.14)$$

en hieruit volgt

$$k a_{kk} = (k-1) a_{k-1,k-1} \quad (9.15a)$$

$$ka_{m+1,k} = ka_{m,k} + ma_{m,k-1} ; \quad m \geq k \quad (9.15b)$$

dus uit (9.7)

$$z(w) = z_0 + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{m,k} z_0^{-m} . \quad (9.16)$$

Onder voorwaarden voor absolute convergentie, zie Wright [18] geldt dan

$$z(w) = z_0 + \gamma + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(\gamma) z_0^{-m} \quad (9.17a)$$

$$P_m(\gamma) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} a_{m,k} \gamma^k . \quad (9.17b)$$

De polynomen $P_m(\gamma)$ kunnen gemakkelijk gevonden worden door middel van een recurrente betrekking, die uit (9.15) volgt

$$P_m(\gamma) = P_{m-1}(\gamma) - (m-1) \int_0^{\gamma} P_{m-1}(\sigma) d\sigma , \quad (9.18)$$

De eerste polynomen zijn

$$P_1(\gamma) = \gamma ; \quad P_2(\gamma) = \gamma - \frac{1}{2}\gamma^2 ; \quad P_3(\gamma) = \gamma - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{1}{3}\gamma^3 \quad (9.19a)$$

$$P_4(\gamma) = \gamma - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{11}{6}\gamma^3 - \frac{1}{4}\gamma^4 ; \quad P_5(\gamma) = \gamma - 5\gamma^2 + \frac{35}{6}\gamma^3 - \frac{25}{12}\gamma^4 + \frac{1}{5}\gamma^5 . \quad (9.19b)$$

De coëfficiënten kunnen eveneens gegenereerd worden door de volgende functie, weer via (9.15)

$$\xi \prod_{n=1}^{m-1} (1+n\xi) = \sum_{k=1}^m k! a_{m,k} \xi^k . \quad (9.20)$$

Gebruiken wij (9.17) voor gebied IV, dan geldt er met de volgende substituties

$$z = p ; \quad w = \rho_4 = -\log(\rho_2) \quad (9.21a)$$

$$\delta = \rho_4 ; \quad \sigma = \frac{1}{\delta} ; \quad \tau = -\sigma \log \sigma = \frac{\log \delta}{\delta} \quad (9.21b)$$

$$z_0 = \rho_4 > 1 ; \quad w_0 = \rho_4 - \log(\rho_4) ; \quad \gamma = \log(\rho_4) \quad (9.21c)$$

voor $z(w)$

$$z(w) = \rho_4 + \log(\rho_4) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} a_{n,m} (\log(\rho_4))^m \rho_4^{-n} =$$

$$\rho_4 + \log(\rho_4) + \frac{\log(\rho_4)}{\rho_4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} a_{n+1,n+1-m} (\log(\rho_4))^{n-m} \rho_4^{-n}. \quad (9.22)$$

Vergelijking met (3.17a) levert

$$d_{n,m} = (-1)^{n-m} a_{n+1,n+1-m}, \quad (9.23)$$

zodat ook de coëfficiënten $d_{n,m}$ bepaald kunnen worden.

Passen wij dezelfde techniek, die leidt tot (9.10), toe op gebied I dan volgt gemakkelijk

$$a_1 = -1 + t \quad ; \quad t = \frac{1}{1-\theta} \quad (9.24a)$$

$$a_n = \frac{(t^3 - t^2)}{n} \frac{d}{dt} a_{n-1}(t) \quad (9.24b)$$

dus

$$a_2(t) = \frac{t^3 - t^2}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} \quad (9.25a)$$

$$a_3(t) = \frac{t^3 - t^2}{3} \left(\frac{3}{2} t^2 - t \right) \quad ; \quad a_3 = \frac{\theta(2\theta+1)}{6(1-\theta)^5}. \quad (9.25b)$$

